

# Correction de l'épreuve A

(durée : 3 h 30)

## Problème 1

Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base de  $E$ . Considérons l'endomorphisme  $u$  de  $E$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$  où  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. a) Déterminer les valeurs propres de  $u$ . Cela suffit-il à assurer la diagonalisabilité de  $u$  ?  
On a

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg}(2(A - \lambda I_3)) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - 2\lambda & -1 \\ 4 & -4 & -2 - 2\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & 1 & 1 \\ 2 - 2\lambda & 2 - 2\lambda & 0 \\ -4\lambda^2 - 2\lambda + 6 & -2 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & 1 & 1 \\ 2 - 2\lambda & 2 - 2\lambda & 0 \\ -4\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Comme  $-4\lambda^2 - 4\lambda + 8 = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2)$ , on constate alors que

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3 &\iff 2 - 2\lambda = 0 \text{ ou } -4(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2, \end{aligned}$$

donc, les valeurs propres de  $u$  étant celles de  $A$ , on a

$$\text{Sp } u = \{1; -2\}.$$

À ce stade, on compte deux possibilités pour les dimensions des sous-espaces propres  $E_1$  et  $E_{-2}$ , respectivement associés à 1 et  $-2$ . On peut avoir

- ou bien  $\dim E_1 = \dim E_{-2} = 1$  et, dans ce cas,  $\dim E_1 + \dim E_{-2} \neq \dim E$  ce qui nous dit que  $u$  n'est pas diagonalisable ;
- ou bien l'une des deux dimensions  $\dim E_1$  et  $\dim E_{-2}$  vaut 1 et l'autre vaut 2 et, dans ce cas  $\dim E_1 + \dim E_{-2} = \dim E$  ce qui assure la diagonalisabilité de  $u$ .

Sans information sur les dimensions des sous-espaces propres, on peut donc dire qu'

il est pour l'instant impossible d'affirmer ou d'infirmer la diagonalisabilité de  $u$ .

b) Pour chaque valeur propre de  $u$ , déterminer une base du sous-espace propre associé.

Déterminons  $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id})$ . D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour  $X = {}^t(x \ y \ z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ,

$$(A - I_3)X = 0 \iff -x + y + z = 0 \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

donc

$$E_1 = \text{Vect}(\vec{e}_1 + \vec{e}_3; \vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

Déterminons  $E_{-2} = \text{Ker}(u + 2\text{Id})$ . D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour  $X = {}^t(x \ y \ z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ,

$$(A + 2I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$E_{-2} = \text{Vect}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3).$$

c) En déduire que  $u$  est diagonalisable.

La question précédente nous dit que l'on a  $\dim E_1 = 2$  et  $\dim E_{-2} = 1$ , ce qui donne  $\dim E_1 + \dim E_{-2} = \dim E$  et permet ainsi d'affirmer que

$$u \text{ est diagonalisable.}$$

d) Déterminer une base  $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$  de  $E$  telle que la matrice de  $u$  dans cette nouvelle base  $\mathcal{B}'$  soit  $\text{Diag}(-2; 1; 1)$ .

Dans cette situation, on sait d'après le cours, que pour avoir  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \text{Diag}(-2; 1; 1)$ , il suffit de prendre pour  $\vec{e}_1'$  un vecteur propre dirigeant  $E_1$  et pour  $(\vec{e}_2', \vec{e}_3')$  une base de  $E_{-2}$ . Le résultat de la question b) nous dit donc de prendre

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \quad \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{e}_3' = \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

2. a) On suppose qu'il existe un endomorphisme  $v$  de  $E$  tel que  $v \circ v = u$ .

i. Démontrer que  $u \circ v = v \circ u$ .

On a  $u \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ (v \circ v) = v \circ u$ , donc

$$u \text{ et } v \text{ commutent.}$$

ii. Démontrer que  $u(v(\vec{e}_1')) = -2v(\vec{e}_1')$ . En déduire que  $v(\vec{e}_1')$  et  $\vec{e}_1'$  sont colinéaires puis que  $\vec{e}_1'$  est un vecteur propre de  $v$ .

On a

$$\begin{aligned} u(v(\vec{e}_1')) &= v(u(\vec{e}_1')) && \text{car } u \text{ et } v \text{ commutent} \\ &= v(-2\vec{e}_1') && \text{car } \vec{e}_1' \in E_{-2}, \end{aligned}$$

ce qui donne, puisque  $v$  est linéaire,

$$u(v(\vec{e}_1')) = -2v(\vec{e}_1').$$

On en déduit que  $v(\vec{e}_1')$  appartient à  $E_{-2}$ , le sous-espace propre de  $u$  associé à la valeur propre  $-2$ . Comme celui-ci est une droite vectorielle dirigée par le vecteur  $\vec{e}_1'$ , on en déduit bien que

$$v(\vec{e}_1') \text{ et } \vec{e}_1' \text{ sont colinéaires.}$$

Le vecteur  $\vec{e}_1'$  étant non nul (pardi, c'est un vecteur propre!), la colinéarité de  $v(\vec{e}_1')$  et  $\vec{e}_1'$  se traduit par l'existence d'un scalaire  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $v(\vec{e}_1') = a\vec{e}_1'$ . Cela signifie bien (toujours parce que  $\vec{e}_1'$  n'est pas nul) que

$$\boxed{\vec{e}_1' \text{ est un vecteur propre de } v.}$$

- iii. Soit  $\vec{x}$  un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre 1. Démontrer que  $u(v(\vec{x})) = v(\vec{x})$  et en déduire que  $v(\vec{x})$  appartient à  $\text{Vect}(\vec{e}_2', \vec{e}_3')$ .

On a

$$\begin{aligned} u(v(\vec{x})) &= v(u(\vec{x})) && \text{car } u \text{ et } v \text{ commutent} \\ &= v(\vec{x}) && \text{car } \vec{x} \in E_1, \end{aligned}$$

donc  $v(\vec{x})$  appartient à  $E_1$ , le sous-espace propre de  $u$  associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire

$$\boxed{v(\vec{x}) \in \text{Vect}(\vec{e}_2', \vec{e}_3').}$$

- iv. En déduire qu'il existe  $a, x, y, z, t \in \mathbb{R}$  tels que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}$ .

On a déjà dit que le fait que  $\vec{e}_1'$  soit un vecteur propre de  $v$  implique l'existence d'un scalaire  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $v(\vec{e}_1') = a\vec{e}_1'$ .

Par ailleurs,  $\vec{e}_2'$  et  $\vec{e}_3'$  sont tous les deux des vecteurs propres de  $u$  associés à la valeur propre 1, donc, d'après la question  $\gamma$ ], on sait que  $v(\vec{e}_2')$  et  $v(\vec{e}_3')$  appartiennent à  $\text{Vect}(\vec{e}_2', \vec{e}_3')$ . Cela signifie qu'il existe quatre scalaires  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  tels que l'on ait  $v(\vec{e}_2') = x\vec{e}_2' + z\vec{e}_3'$  et  $v(\vec{e}_3') = y\vec{e}_2' + t\vec{e}_3'$ .

Par suite, d'après la définition de la matrice de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , on a bien

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}.}$$

- v. Démontrer que  $(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v))^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$  et en déduire que  $a^2 = -2$ .

La relation  $v \circ v = u$  se traduit, dans la base  $\mathcal{B}'$ , par l'égalité matricielle

$$\boxed{(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v))^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u).}$$

Or

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v))^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \spadesuit & \heartsuit \\ 0 & \diamond & \clubsuit \end{pmatrix}$$

où  $\spadesuit, \heartsuit, \diamond, \clubsuit$  désignent des scalaires dont on se moque. Cela implique, par identification des coefficients des matrices  $(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v))^2$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \text{Diag}(-2, 1, 1)$ , que

$$\boxed{a^2 = -2.}$$

- b) Existe-t-il des endomorphismes  $v$  de  $E$  tels que  $v \circ v = u$  ?

D'après les questions précédentes, l'existence d'un endomorphisme  $v$  tel que  $v \circ v = u$  implique celle d'un scalaire  $a \in \mathbb{R}$  vérifiant  $a^2 = -2$ . Cette équation n'ayant aucune solution réelle (puisque le carré d'un nombre réel n'est jamais strictement négatif), on en déduit qu'

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'endomorphisme } v \text{ de } E \text{ tels que } v \circ v = u.}$$

3. a) i. Démontrer que la famille  $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1))$  est libre.

Considérons  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda\vec{e}_1 + \mu u(\vec{e}_1) = \vec{0}$ . L'expression de la matrice  $A$  nous dit que

$$u(\vec{e}_1) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

donc

$$\left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right)\vec{e}_1 + \frac{\mu}{2}\vec{e}_2 + 2\mu\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Comme la famille  $\mathcal{B}$  est libre, on en déduit que  $\lambda + \mu/2 = 0$  et  $\mu = 0$ , d'où  $\lambda = \mu = 0$ . On a ainsi démontré que

la famille  $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1))$  est libre.

ii. Démontrer qu'un vecteur  $\vec{x}$  de composantes  $(a, b, c)$  dans la base  $\mathcal{B}$  appartient à  $\text{Vect}(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1))$  si, et seulement si,  $4b - c = 0$ . En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la famille  $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1), \vec{x})$  soit une base de  $E$ .

On a

$$\begin{aligned} & \vec{x} \in \text{Vect}(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1)) \\ \iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{x} = \lambda\vec{e}_1 + \mu u(\vec{e}_1) \\ \iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right)\vec{e}_1 + \frac{\mu}{2}\vec{e}_2 + 2\mu\vec{e}_3 \\ \iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = \lambda + \frac{\mu}{2} \\ b = \frac{\mu}{2} \\ c = 2\mu \end{cases} \\ \iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2\lambda + \mu = 2a & L_1 \\ \mu = 2b & L_2 \\ 2\mu = c & L_3 \end{cases} \\ \iff & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \boxed{2\lambda} + \mu = 2a & L_1 \\ \boxed{\mu} = 2b & L_2 \\ 0 = c - 4b & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \\ \iff & c - 4b = 0, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la méthode du pivot (en encadrant les pivots) pour aboutir à une réduite de Gauß dont l'équation auxiliaire nous donne la condition nécessaire et suffisante recherchée. En conclusion,

un vecteur  $\vec{x}$  de composantes  $(a, b, c)$  dans la base  $\mathcal{B}$  appartient au sous-espace  $\text{Vect}(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1))$  si, et seulement si,  $4b - c = 0$ .

Pour que la famille de 3 vecteurs  $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1), \vec{x})$  soit une base de l'espace  $E$  qui est de dimension 3, le cours nous dit qu'il suffit que cette famille soit libre. On sait déjà que les vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $u(\vec{e}_1)$  sont linéairement indépendants. Pour que la famille  $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1), \vec{x})$  soit libre, il suffit donc que le vecteur  $\vec{x}$  n'appartienne pas au sous-espace  $\text{Vect}(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1))$ . D'après la condition nécessaire et suffisante que nous venons d'établir, on peut donc conclure que

$(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1), \vec{x})$  est une base de  $E$  si, et seulement si, les composantes  $(a, b, c)$  du vecteur  $\vec{x}$  dans la base  $\mathcal{B}$  vérifie la condition  $4b \neq c$ .

► Dans la suite de ce problème,  $\vec{e}_3''$  désigne le vecteur de composantes  $(1, 1, 1)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On note alors  $\mathcal{B}''$  la famille  $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1), \vec{e}_3'')$ .

iii. Justifier que  $\mathcal{B}''$  est une base de  $E$ .

Comme  $4 \times 1 \neq 1$  (si ! si!), la question précédente nous dit que

$$\boxed{\mathcal{B}'' \text{ est une base de } E.}$$

iv. Écrire la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}''$  et calculer  $P^{-1}$ . Calculer alors la matrice  $A''$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}''$ .

Les composantes de  $\vec{e}_1$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(1, 0, 0)$ . On a déjà signalé que l'expression de la matrice  $A$  nous dit que  $u(\vec{e}_1) = (1/2)\vec{e}_1 + (1/2)\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ , donc les composantes de  $u(\vec{e}_1)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(1/2, 1/2, 2)$ . Enfin, celles de  $\vec{e}_3''$  sont  $(1, 1, 1)$  par définition. Par suite, on a

$$\boxed{P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Soit  $X$  le vecteur colonne de coordonnées  $x, y, z$  et  $Y$  celui de coordonnées  $a, b, c$ . Alors

$$\begin{aligned} PX = Y &\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{2x} + y + 2z = 2a & L_1 \\ \boxed{y} + 2z = 2b & L_2 \\ 4y + 2z = 2c & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{2x} + y + 2z = 2a & L_1 \\ \boxed{y} + 2z = 2b & L_2 \\ \boxed{-6z} = 2c - 8b & L_3 - 4L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = a - b \\ y = -\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \\ z = \frac{4}{3}b - \frac{1}{3}c \end{cases} \\ &\iff X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} Y \end{aligned}$$

donc, d'après le cours,

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Il s'ensuit que

$$A'' = P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne, après calculs,

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Soit  $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ , où les nombres  $\gamma, \delta, \lambda, \mu$  sont les coefficients de la matrice  $A'' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 0 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$  déterminées à la question précédente.

i. Démontrer que la famille  $\mathcal{C}' = ((0, 1), f((0, 1)))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et écrire la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$ .

On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc les composantes du vecteur  $f((0, 1))$  dans la base canonique sont données par

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire  $f((0, 1)) = (-1, 1)$ .

Comme  $(0, 1)$  et  $(-1, 1)$  ne sont pas colinéaires, on en déduit que

$$\mathcal{C}' = ((0, 1), f((0, 1))) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.$$

De plus, on a

$$\text{la matrice de passage de } \mathcal{C} \text{ à } \mathcal{C}' \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii. Calculer alors la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base  $\mathcal{C}'$ .

On a  $f((0, 1)) = 0(0, 1) + 1f((0, 1))$ . Par ailleurs,  $f(f((0, 1))) = f((-1, 1))$  est donné par

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc  $f(f((0, 1))) = 1(0, 1) + 0f((0, 1))$ , ce qui donne

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) En notant  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$ , posons  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ .

i. Démontrer que  $R$  est inversible et calculer  $R^{-1}$ .

On a

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $X$  le vecteur colonne de coordonnées  $x, y, z$  et  $Y$  celui de coordonnées  $a, b, c$ .  
Alors

$$\begin{aligned} RX = Y &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{x} & = a \\ & \boxed{-z} = b \\ & \boxed{y} + z = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = a \\ y = b + c \\ z = -b \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} Y \end{aligned}$$

donc, d'après le cours,

$$\boxed{R \text{ est inversible et } R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii. Calculer  $R^{-1}A''R$ .

On a

$$R^{-1}A''R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\boxed{R^{-1}A''R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) *En déduire que  $A$  est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.*

En rassemblant les changements de bases effectués jusqu'ici, on a

$$R^{-1}P^{-1}APR = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$A = PR \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (PR)^{-1},$$

ce qui prouve bien que

$A$  est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.