

Intégration

1. Uniforme continuité

- 1** Montrer qu'une fonction T -périodique continue sur \mathbb{R} est uniformément continue.

Solution de 1 :

Pas de miracle ici, il faut sortir les ε .

Traduire l'uniforme continuité sur une seule période ne suffit pas il y a des problèmes de raccord (cas de deux points, l'un se ramenant au début de la période et l'autre à la fin) : il faut le faire sur un intervalle de deux périodes, puis se ramener dans cet intervalle.

- 2** Étudier l'uniforme continuité sur \mathbb{R}_*^+ de \ln et $x \mapsto x \ln x$.

Solution de 2 :

\ln présente un problème d'uniforme continuité au voisinage de 0 (asymptote verticale). On peut utiliser des suites. L'avantage ici, est que $\ln(x_n) - \ln(x'_n)$ se réécrit, se qui permet de trouver facilement des suites (x_n) et (x'_n) tendant vers 0 contredisant l'uniforme continuité.

Pour $f : x \mapsto x \ln x$ commencer par tracer la courbe (ça fait réviser les études de fonctions) et se rendre compte que la branche parabolique au voisinage de $+\infty$ risque de poser problème.

Chercher des suites au voisinage de $+\infty$, par exemple, $x_n = n$ et $x'_n = n + h_n$ où on cherche $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ tel que $f(x'_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$ ce qui se trouve en faisant un développement asymptotique...

- 3** Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b.$$

Solution de 3 :

Sortir les ε .

Commencer par le cas $x \geq 0$, l'autre cas se traite de manière similaire.

Traduire l'uniforme continuité et aller de 0 à x par pas de η pour traduire l'uniforme continuité un certain nombre de fois et majorer $|f(x) - f(0)|$.

- 4** Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ continue telle que f admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R}^+ .

Solution de 4 :

Sortir les ε .

Au voisinage de $+\infty$, les variations sont contraintes par la convergence.

Ailleurs, on est sur un segment donc cela se passe bien.

Reste à gérer le raccord...

2. Manipulation d'intégrales

5 Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $a < b$. À quelle condition a-t-on $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

... Dans le cas complexe, on pourra écrire $\int_a^b f = \int_a^b |f| e^{i\theta}$

Solution de 5 :

C'est le cas d'égalité d'une inégalité du cours. Reprendre la démonstration de l'inégalité.

6 Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([0, 1])$ telles que $f \geq 0, g \geq 0, fg \geq 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f \int_0^1 g \geq 1.$$

Solution de 6 :

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

7 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f est T -périodique, $\int_x^{x+T} f(t) dt$ ne dépend pas de x . Étudier la réciproque.

8 Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Solution de 8 :

Intégrer $g : t \mapsto f(t) - t$ et utiliser le TVI.

9 Formule de la moyenne

Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ tel que $g \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Solution de 9 : Formule de la moyenne

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

10 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x+1)}{f(x)}$.

Solution de 10 :

Appliquer le TAF à $\ln(f)$ sur $[x, x+1]$.

Réponse : e^α .

11 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I de \mathbb{R} à valeurs complexes.

On veut montrer que $\int_I \sin(nt)f(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

1. Montrer le résultat si f est constante, puis en escalier, puis continue par morceaux.
2. Montrer directement le résultat si f est de classe \mathcal{C}^1 .

On peut remplacer $\sin(nt)$ par $\cos(nt)$ ou e^{int} .

12 Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Montrer que $\int_0^1 t^n f(t)dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

13 Lemme de Grönwall

Soient $f, g \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ telles que $f, g \geq 0$ et $C > 0$. On suppose que

$$\forall x \geq 0, f(x) \leq C + \int_0^x f(t)g(t)dt.$$

Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \leq Ce^{\int_0^x g(t)dt}$.

Solution de 13 : Lemme de Grönwall

Étudier $h : x \mapsto \left(C + \int_0^x f(t)g(t)dt \right) e^{-\int_0^x g(t)dt}$.

14 Montrer que $(I_n)_n = \left(\int_0^1 \frac{du}{1+u^n} \right)_n$ converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $I_n - \ell$.

Solution de 14 :

Vérifier que $I_n \rightarrow 1$ (intuitif) en majorant $|I_n - 1|$.

Puis faire une IPP dans cette majoration.

Réponse : $\frac{\ln 2}{n}$.

15 Soit, pour $p, q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$. Calculer $I_{p,q}$ et en déduire que

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

1. Montrer que (I_n) converge.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n) .
3. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$.

17 Intégrales de Wallis

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.

1. Comparer I_n et J_n .
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n) .
3. En déduire une expression de I_n .
4. Étudier la monotonie de (I_n) .
5. Que dire de la suite $(nI_n I_{n-1})$?
6. Montrer que $I_{n-2} \sim I_n$ puis que $I_{n-1} \sim I_n$.
7. En déduire un équivalent de I_n .

3. Calculs de primitives et d'intégrales

18 Déterminer les primitives de fonctions données par les expressions suivantes, en précisant les intervalles de validité :

- | | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|---|---|
| 1. $(t+1)\operatorname{ch} t$ | 7. $\frac{1}{t^2 \pm 2t + 2}$ | 12. $\frac{1}{\cos^3 t}$ | 17. $\frac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}$ |
| 2. $t \sin^3 t$ | 8. $\frac{t^4 + 1}{t^4 - 1}$ | 13. $\frac{t}{1 + \sqrt{t+1}}$ | 18. $\frac{\operatorname{ch} t}{1 + \operatorname{ch}^2 t}$ |
| 3. $\frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}}$ | 9. $\frac{1}{e^t + 1}$ | 14. $\frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$ | 19. $\frac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$ |
| 4. $\frac{\ln t}{t + t \ln^2 t}$ | 10. $\frac{1}{\sqrt{1 + e^{2t}}}$ | 15. $\frac{t+1}{\sqrt{2-t^2}}$ | 20. $\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}$ |
| 5. $\frac{t^5}{1 + t^{12}}$ | 11. $\frac{\cos t}{1 + \cos^2 t}$ | 16. $\frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}}$ | |
| 6. $\frac{1}{t(t^2 - 1)}$ | | | |

Solution de 18 :

Voir TD de début d'année.

Indications :

- | | | | |
|---|-----------|------------------|-------------------|
| 1. IPP | néariser. | 5. Direct | sique |
| 2. IPP et transfo-
mer \sin^2 et li- | 3. CV | 6. DES | 8. DES |
| | 4. CV | 7. Méthode clas- | 9. +...-... ou CV |

Réponses :

- | | |
|---|--|
| 1. $t \operatorname{sh} t - e^{-t} + C$ (\mathbb{R}) | $I_2 =]-1, 0[$ ou $I_3 =]0, 1[$ ou $I_4 =]1, +\infty[$ |
| 2. $\frac{1}{3} t \cos^3 t - t \cos t + \frac{2}{3} \sin t + \frac{1}{9} \sin^3 t + C$ (\mathbb{R}) | 7. $\frac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 2) - \operatorname{Arctan}(t + 1) + C$ (\mathbb{R}) et $\operatorname{Arctan}(t - 1) + C$ (\mathbb{R}) |
| 3. $2 \operatorname{Arctan} \sqrt{t} + C$ (\mathbb{R}_*^+) | |
| 4. $\frac{\ln(1 + \ln^2 t)}{2} + C$ (\mathbb{R}_*^+) | 8. $t + \frac{1}{2} \ln \left \frac{t-1}{t+1} \right - \operatorname{Arctan} t + C_k$ sur $I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1, 1[$ ou $I_3 =]1, +\infty[$ |
| 5. $\frac{\operatorname{Arctan} t^6}{6} + C$ (\mathbb{R}) | 9. $t - \ln(e^t + 1)$ |
| 6. $\frac{\ln t^2 - 1 - 2 \ln t }{2} + C_k$ ($I_1 =]-\infty, -1[$ ou | 10. $t - \frac{1}{2} \ln(e^{2t} + 1)$ |

19

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $x = \Re z$ et $y = \Im z$. Montrer que $\int \frac{dt}{t-z} = \ln|t-z| + i \operatorname{Arctan} \frac{t-x}{y} + c$.

Solution de 19 :

Quantité conjuguée.

20

Calculer les intégrales suivantes

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1. $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$ | 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos t}$ | 5. $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{(t+1)^2} dt$ | 7. $\int_0^1 \frac{t}{t^3+1} dt$ |
| 2. $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ | 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \sin t \cos t}$ | 6. $\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ | 8. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}}$ |

Solution de 20 :

Voir TD de début d'année.

21

Soit f continue sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = f(a + b - x)$.

Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

4. Fonction intégrale dépendante de ses bornes

22 Soit φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(t) = \frac{\text{sh } t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_x^{2x} \varphi(t) dt \end{cases}$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa parité.
2. Justifier que f est dérivable et calculer f' .
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de f et la branche infinie correspondante.
5. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et retrouver le résultat de la question précédente.
6. Effectuer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f .
7. Tracer le graphe de f .

23 CCINP 56

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de la fonction H .

Solution de 23 : CCINP 56

1. Soit x_0 un réel de $]1; +\infty[$.

Posons : $\forall x \in]1; +\infty[, F(x) = \int_{x_0}^x \frac{dt}{\ln t}$.

$t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1; +\infty[$.

Donc, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est dérivable sur $]1; +\infty[$

et $\forall x \in]1; +\infty[, F'(x) = \frac{1}{\ln x}$.

De plus, $\forall x \in]1; +\infty[, H(x) = F(x^2) - F(x)$ et $\forall x \in]1; +\infty[$ on a $[x; x^2] \subset]1; +\infty[$.

On en déduit que H est dérivable sur $]1; +\infty[$.

De plus, $\forall x \in]1; +\infty[, H'(x) = 2x \cdot \frac{1}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

On en déduit que H est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1; +\infty[$.

2. En posant $x = 1 + h$, $u(x) = v(h)$ avec $v(h) = \frac{h - \ln(1+h)}{h \cdot \ln(1+h)}$.

Or au voisinage de 0, $h - \ln(1+h) = \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)$ donc $h - \ln(1+h) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}h^2$.

Et $h \ln(1+h) \underset{0}{\sim} h^2$ donc $v(h) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = \lim_{h \rightarrow 0} v(h) = \frac{1}{2}$.

3. En utilisant u , on a $H(x) = \int_x^{x^2} u(t)dt + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \int_x^{x^2} u(t)dt + \ln(x+1)$. (1)

$\forall x \in]1; +\infty[$, u est continue sur l'intervalle $[x, x^2]$. u est continue sur $]1; +\infty[$ et admet une limite finie en 1, donc u est prolongeable par continuité en 1.

Notons u_1 ce prolongement continu sur $[1; +\infty[$.

Alors, $\forall x \in]1; +\infty[$, $\int_x^{x^2} u(t)dt = \int_x^{x^2} u_1(t)dt$. (2)

On pose alors $\forall x \in [1; +\infty[$, $U_1(x) = \int_x^{x^2} u_1(t)dt$.

Pour les mêmes raisons que dans la question 1., U_1 est dérivable, donc continue, sur $[1, +\infty[$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} U_1(x) = U_1(1) = 0$.

Donc, d'après (2), $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} u(t)dt = \lim_{x \rightarrow 1} U_1(x) = 0$.

On en déduit, d'après (1), que $\lim_{x \rightarrow 1} H(x) = \ln 2$.

5. Sommes de Riemann

24

Étudier convergence et limite des suites de terme général

1. $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \cos \frac{k\pi}{n}$ 2. $\sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ 3. $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$ 4. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$ 5. $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^3 + nk^2}$ 6. $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Solution de 24 :

Sommes de Riemann plus ou moins déguisées.

Pour la dernière, transformer tous ces produits en sommes.

25

(Centrale) On désigne par z un nombre complexe de module différent de 1 ; on

pose pour tout entier naturel k , $I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{z - e^{it}} dt$.

1. Calculer, pour k entier naturel non nul, $I_k - zI_{k-1}$.
2. Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I_k pour tout k .

Remarque : on pourrait calculer cette intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de celui-ci et en séparant partie réelle et partie imaginaire... mais ce serait certainement laborieux !

4. Faire dans I_1 le « changement de variable » $u = e^{it}$. Qu'en penser ?

26

(Centrale) Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Déterminer la limite de la

suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Solution de 26 :

C'est presque une somme de Riemann : il faudrait un $f'\left(\frac{k}{n}\right)$: on s'y ramène en utilisant l'uniforme continuité de f sur le SEGMENT $[0, 1]$...

27

Déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{k}$.

Solution de 27 :

Faire apparaître une somme de Riemann.

28**Inégalité de Jensen continue**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a < b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t)) dt$$

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi(x) \geq \phi(\gamma) + (x - \gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $x = f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b . Comment choisir γ pour en déduire l'inégalité de Jensen ?
4. Écrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \mapsto x^2$. Vérifier que le résultat peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Écrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \mapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de 28 : Inégalité de Jensen continue

Indications :

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.

$$3. \gamma = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Corrigé :

1. Définissons, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{n}$ sur le segment $[a, b]$. En utilisant la convexité de ϕ ,

$$\phi\left(\frac{S_n}{b-a}\right) = \phi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$

Mais $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t) dt$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t)) dt,$$

ϕ est continue, les inégalités larges « sont conservées à la limite »... On conclut donc.

2. C'est du cours (le graphe de ϕ est au-dessus de ses tangentes).
3. Donc, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\phi(f(t)) \geq \phi(\gamma) + (f(t) - \gamma)\phi'(\gamma)$$

On intègre entre a et b ($a < b$, donc l'inégalité ne change pas de sens), ce qui donne

$$\int_a^b \phi(f(t)) dt \geq (b-a)\phi(\gamma) + \left(\int_a^b f(t) dt - \gamma(b-a)\right)\phi'(\gamma)$$

En particulier, prenons $\gamma = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t)) dt$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

4. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, l'inégalité s'écrit :

$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right)^2 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(t) dt\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t) dt$$

ce qui est bien une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b 1 \times f(t) dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b 1^2 dt\right) \left(\int_a^b f^2(t) dt\right)$$

5. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0, +\infty[$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{b-a}{\int_a^b f(t) dt} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt$$

ou encore

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right)$$

(inégalité rencontrée par exemple dans un exercice d'oral X avec $a = 0$, $b = 1$, ce qui la rend plus esthétique :

$$1 \leq \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \right)$$

Mais en tout cas, Cauchy-Schwarz fonctionne encore ici, en prenant les fonctions \sqrt{f} et $1/\sqrt{f}$.

6. Formules de Taylor

29 Soit $g \in \mathcal{C}([0, 1])$. Déterminer $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' = g$.

Solution de 29 :

Utiliser Taylor reste intégral.

30 Montrer, en étudiant $\ln(1+x)$ entre 0 et 1, que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$.

Solution de 30 :

Utiliser Taylor-Lagrange.

31 Soit f de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

Étudier la limite éventuelle de $\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Solution de 31 :

Utiliser Taylor-Young, deux fois.

32 Soit $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ deux fois dérivable sur \mathbb{R} telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \|f\|_{\infty}$ et $M_2 = \|f''\|_{\infty}$.

1. Montrer que $\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.

2. En déduire que f' est bornée, et, en notant $M_1 = \|f'\|_{\infty}$, $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.

Solution de 32 :

Pour 1. utiliser deux formules de Taylor, une entre a et $a+h$ et l'autre entre $a-h$ et a .
Pour 2. étudier la fonction de h obtenue dans la majoration précédente.

33

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Justifier l'existence de $M = \sup_{[a, b]} |f''|$.
2. Soit $x \in [a, b]$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[x, a]$, puis sur $[x, b]$, montrer que $|f(x)| \leq \frac{M}{2}(b-x)(x-a)$.
3. En déduire que $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$.

Solution de 33 :

1. Continuité sur un segment.
2. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et a : (1)
Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et b : (2)
Éliminer les $f'(x)$ avec $(b-x)(1) + (x-a)(2)$, puis majorer en valeur absolue.
3. Pas de difficulté.

34

Soit $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a-r, a+r] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 .

Calculer la limite de $\frac{1}{h^3} (f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a))$ lorsque $h \rightarrow 0$.