⑬ Si λ proche de 0,

(*) $A - \lambda I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$?

(*) $\Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) \neq 0$

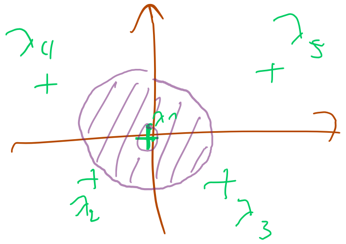
$\Longleftrightarrow (-1)^n \det(\lambda I_n - A) = (-1)^n \chi_A(\lambda) \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ λ n'est pas racine de χ_A

$\Longleftrightarrow$ λ n'est pas valeur propre de A.

$Sp\,A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ racines de χ_A

avec $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_p|$ 2à2 ≠.



. Si $0 \notin Sp\,A$,

dès que $|\lambda| < |\lambda_1|$,

$\lambda \notin Sp(A)$ donc

$A - \lambda I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

. Si $0 \in Sp\,A$,

* soit $Sp\,A \neq \{0\}$,

$Sp\,A = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$

dès que $0 < |\lambda| < |\lambda_2|$, $\lambda \notin Sp\,A$,

$A - \lambda I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

* Soit $Sp\,A = \{0\}$,

$\forall \lambda \neq 0$, $\lambda \notin Sp\,A$, $A - \lambda I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A^{(k)} = A - \frac{1}{k} I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

à partir d'un certain rang car $\begin{cases} \frac{1}{k} \longrightarrow 0 \\ \frac{1}{k} \neq 0. \end{cases}$

et
$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} - \frac{1}{k} & & (a_{i,j}) \\ & \ddots & \\ (a_{i,j}) & & a_{nn} - \frac{1}{k} \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to +\infty]{} A.$$

$$\boxed{\text{Toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles.}}$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r

on a $U, V \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tq

$$A = U J_r V$$

$$= U \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r} & (0) \end{pmatrix} V$$

Soit
$$A^{(k)} = U \overbrace{\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{k} & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1+\frac{1}{k} & & & \\ (0) & & & \frac{1}{k} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{k} \end{pmatrix}}^{\text{inversible}} V \longrightarrow U J_r V = A$$

inversible.