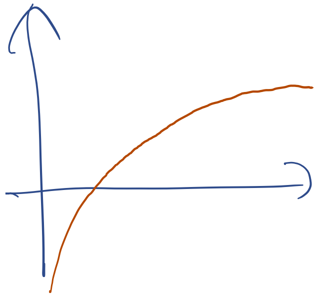
2) U.C. de ln

Pb au v. de 0 ?



$x_n = \frac{1}{n}$

$y_n = \frac{1}{2n}$

$x_n - y_n = +\frac{1}{2n} \longrightarrow 0$

$\ln x_n - \ln y_n = \ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$

$= \ln 2 \not\longrightarrow 0$.

ln n'est pas U.C. sur $\mathbb{R}_+^*$

UC de $f : x \longmapsto x \ln x$. dériv.

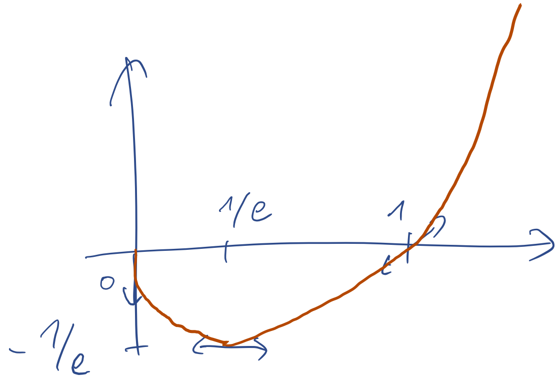
$f' : x \longmapsto \ln x + 1$

$\frac{f(x)}{x} = \ln x \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

$\xrightarrow[0]{} -\infty$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

↑ ⟷ BPDAV



Si pb d'UC, c'est au v. de $+\infty$.

$x_n = n + h_n$

$y_n = n$ avec $h_n \to 0$

$x_n - y_n = h_n \longrightarrow 0$.

Comment choisir h_n ?

$$f(x_n) - f(y_n)$$

$$= (n+h_n)\ln(n+h_n) - n\ln n$$

$$= n\left[\ln(n+h_n) - \ln n\right] + h_n \ln(n+h_n)$$

$$= n\ln\Big(1+\underbrace{\frac{h_n}{n}}_{\to 0}\Big) + h_n\ln(n+h_n).$$

$$= n\left[\frac{h_n}{n} + o\left(\frac{h_n}{n}\right)\right] + h_n\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{h_n}{n}\right)\right]$$

$$= \underbrace{h_n}_{\to 0} + \underbrace{o(h_n)}_{= h_n \times \varepsilon_n \to 0} + \boxed{h_n \ln n}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{h_n}_{\to 0} \ln\Big(1+\underbrace{\frac{h_n}{n}}_{\to 0}\Big)}_{\to 0}$$

Pour que $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$ il faut et il suffit que $h_n \ln n \not\to 0$.

Par exemple, $h_n = \dfrac{1}{\ln n} \to 0$.