Espaces Préhilbertiens Réels

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I Produit scalaire et norme euclidienne

1 Définition d'un produit scalaire

Définition 1 : Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On appelle **produit scalaire sur** E toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.

C'est-à-dire toute application

$$\varphi : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

(i) **Bilinéarité** :

Linéarité à gauche : Pour tout $y\in E$, l'application $x\mapsto\varphi(x,y)$ est linéaire :

Linéarité à droite : Pour tout $x\in E$, l'application $y\mapsto\varphi(x,y)$ est linéaire :

(ii) **Symétrie** :

(iii) **Définie-positivité** :

Positivité :

Caractère défini :

Remarque

R 1 – Dans la pratique on commence par montrer la symétrie, et alors la linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et vice versa : il suffit de ne montrer que l'une ou l'autre.

R 2 – La définie-positivité se résume par $\forall\, x\neq 0,\quad \varphi(x,x)>0$

Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si φ un produit scalaire sur E, on dit que (E,φ) est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si φ un produit scalaire sur E, on dit que (E,φ) est un **espace euclidien**.

Remarque

R 3 – Un espace euclidien est donc un espace préhilbertien réel de dimension finie.

R 4 – On note en général $(x|y)$ ou $\langle x|y\rangle$ ou $\langle x,y\rangle$ ou $x\cdot y$ à la place de $\varphi(x,y)$.

R 5 – $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire

$$\iff \begin{cases} \forall\, x\in E,\quad (x|\cdot) & \text{linéaires ;}\\ \forall\, y\in E,\quad (\cdot|y) & \\ (x,y)\mapsto(x|y) & \text{symétrique ;}\\ \forall\, x\in E,\quad (x|x)\geqslant 0 & \\ (x|x)=0\Longrightarrow x=0 & \end{cases}$$

2 Exemples

a Sur $\mathbb{R}^n$

Définition 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$, on définit

$$(x|y)=$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque

R 6 – **Important** : Si X et Y désignent les matrices colonnes des composantes de x et de y dans la base canonique, on remarque que $(x|y) =$

R 7 – Dans $\mathbb{R}^2$, $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$, dans $\mathbb{R}^3$, $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

b Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) =$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque

R 8 – Il s'agit en fait de l'écriture matricielle du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues

Pour des fonctions f et g de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a<b$, on définit

$$(f|g) =$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

d Sur $\mathbb{R}[X]$

Exercice 1

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

où $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ **et** $P = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$**.**

Exercice 2

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$(P|Q) = \int_{0}^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta.$$

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel.
Pour tout vecteur x de E, on pose

$$\|x\| =$$

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Remarque

R 9 – La positivité du produit scalaire rend cette définition licite.

Exemple

E 1 – Sur $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, $\|x\| =$

En particulier, sur $\mathbb{R}$, $\|x\| =$

E 2 – Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|A\| =$

E 3 – Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $\|f\| =$

b Identités remarquables et polarisation

Propriété 1 : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $\|x+y\|^2 =$

(*ii*) $\|x-y\|^2 =$

(*iii*) ***Identité du parallélogramme*** (*HP*)
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =$

Remarque : Illustration géométrique de cette dernière identité

R 10 –

Propriété 2 : Identités de polarisation

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $(x|y) =$

(*ii*) $(x|y) =$

c Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel. Alors

ou encore,

avec égalité si et seulement si

Remarque

R 11 – L'inégalité est encore valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive, mais le cas d'égalité n'est plus valable. C'est le cas par exemple de la covariance.

Exemple

E 4 – Sur $\mathbb{R}^n$,

E 5 – Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

E 6 – Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

Exercice 4 : CCINP 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) **Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
   (b) **Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.**
2. **Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble**
$$\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$$
admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice 5 : CCINP 79

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. **Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.**
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. **Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.**
   On pose : $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. **Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

d Inégalité triangulaire

Propriété 3 : Inégalité de Minkowski

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

avec égalité si et seulement si

Corollaire 1 : Double inégalité

Soit $(E, |\,)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

e Norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition 7 : Norme

On appelle **norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel** E, toute application $N\colon E \to \mathbb{R}$ telle que

Défini-positivité

-
-

Homogénéité

Inégalité triangulaire

Exemple

E 7 – C'est le cas de

Propriété 4 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

Remarque

R 12 – Il existe d'autre normes qui ne sont pas issues de produit scalaire. Par exemple, dans $\mathbb{R}^n$,

ou sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

La norme euclidienne est en général notée $\|\cdot\|_2$.

Définition 8 : Vecteur normé

Un vecteur x d'un espace préhilbertien E est dit **normé**, ou **unitaire** si

Remarque

R 13 – Si x est un vecteur non nul, alors est unitaire, de même sens et de même direction.

Définition 9 : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x,y)$ par $\mathrm{d}(x,y) =$
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta \in \qquad \text{et} \quad \cos\theta =$$

Remarque

R 14 – La bonne définition provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, laquelle se retrouve à partir de cette définition car $|\cos\theta| \leqslant 1$.

R 15 – Autrement dit, $(x|y) =$

Définition 10 : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x \in E$, on définit la distance de x à A par

Remarque

R 16 – La borne inférieure existe toujours car $\mathscr{E}_x = \left\{ \|x-y\| \ ; \ y \in A \right\}$

II Orthogonalité

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 11 : Vecteurs orthogonaux

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.

x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y)=0$. On écrit parfois $x \perp y$.

Remarque

R 17 – 0_E est orthogonal à tout vecteur.

R 18 – La notion d'orthogonalité ne prend de sens qu'en dimension au moins 2.

Théorème 2 : Théorème de Pythagore

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.

Remarque

R 19 – Cela permet bien de retrouver le théorème de Pythagore tel qu'on le connaît.

2 Famille orthonormale

Définition 12 : Familles orthogonale et orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1,\dots,v_p) \in E^p$.

$(v_1,\dots,v_p)$ est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$(v_1,\dots,v_p)$ est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

Exemple

E 8 – La base canonique est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

E 9 – La base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique.

E 10 – La famille des polynômes de Legendre est orthogonale pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ (voir sujet de concours blanc).

E 11 – La famille des polynômes de Tchebychev est orthogonale pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_0^{\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Propriété 5 : orthogonale + non nuls ⇒ libre

Toute famille orthogonale *de vecteurs* non nuls (*en particulier toute famille* orthonormale) *d'un espace préhilbertien réel est* libre.

Remarque

R 20 – C'est un moyen pratique et usuel pour montrer qu'une famille est libre !

Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux

Si E est un espace euclidien de dimension n, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème 3 : Théorème de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E, une famille orthogonale $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

Attention : la réciproque n'est vraie que pour $p=2$.

3 Ensembles orthogonaux

Définition 13 : Parties orthogonales

Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et A,B des parties non vides de E.

On dit que A est ***orthogonale*** à B si et seulement si

On note $A \perp B$.

Exemple

E 12 – Tout ensemble non vide est orthogonal à $\{0_E\}$.

E 13 – Soient $A = \mathbb{R}(1,-1,0) + \mathbb{R}(0,0,1)$ et $B = \mathbb{R}(1,1,0)$. Alors A est orthogonale à B.

Propriété 6 : Intersection de parties orthogonales

Si $A, B \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A \cap B =$

Remarque

R 21 – Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$: leur somme est directe.

Exemple

E 14 – Parties de $\mathbb{R}^3$ orthogonales d'intersection vide : $A = (0,1,0) + \mathbb{R}(1,0,0)$ et $B = \mathbb{R}(0,0,1)$.

4 Orthogonal d'une partie

Définition 14 : Orthogonal d'une partie

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et A une partie non vide de E. On définit l'**orthogonal de** A comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp =$$

$$x \in A^\perp \iff$$

Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à A.

Exemple

E 15 – Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Propriété 7 : Décroissance de l'orthogonal

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et A, B des parties non vides de E.

Si $A \subset B$, alors

Propriété 8 : L'orthogonal est un sev

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et A une partie non vide de E.

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

De plus, $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

Corollaire 3 : Orthogonal et famille génératrice

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.

Si $F = \operatorname{Vect} A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E,

$$x \in F^\perp \iff$$

Remarque

R 22 – En particulier, connaissant une base de F, il suffit d'être orthogonal aux vecteurs de la base pour être orthogonal à F.

Propriété 9

Soit E un espace préhilbertien réel, F sous-espace vectoriel de E.

- $E^\perp = \{0_E\}$ *et* $\{0_E\}^\perp = E$.
- $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,

Remarque

R 23 – Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul. Cela peut être très utile !

Exercice 6 : CCINP 39

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. **(a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$**

converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

(b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

2. (supprimée)
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.

   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(|)$).

   Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

III Espaces ou sous-espaces euclidiens

Rappel : Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Base orthonormale

Théorème 4 : Existence de base orthonormale

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

On a même un algorithme permettant de transformer une base en base orthonormale. Découvrons-le sur un exemple avant de le formaliser :

Exemple

E 16 – Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,1,0)$. Il est facile de voir que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (en calculant le déterminant dans la base canonique, par exemple).

On va d'abord transformer la famille en une famille orthogonale, puis orthonormale qui sera donc bien une base.

Définition 15 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Étant donné $(E, |)$ un espace euclidien, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur

$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$

   soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$:

$$\forall\, i < j, \quad (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0.$$

3. On normalise les vecteurs :

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right).$$

Remarque

R 24 – Il est aussi possible de normaliser les vecteurs au fur et à mesure plutôt que de le faire à la fin pour tous.

Propriété 10

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une b.o.n de E.

Remarque

R 25 – Matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$:

R 26 – Il se peut dans certaines situations qu'une base orthogonale nous suffise. (L'expression est plus simple, mais pas forcément les calculs).

Corollaire 4 : Existence de b.o.n.

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Corollaire 5 : Théorème de la b.o.n. incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

Propriété 11 : Expression en b.o.n.

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une **base orthonormale** *de E : $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Alors*

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\quad x_i =$$

$$(x|y) =$$

$$\|x\| =$$

Remarque : Important

R 27 – Si X et Y désignent respectivement les vecteurs colonnes des composantes de x et y dans la base $\mathscr{B}$, alors $(x|y)=X^\intercal \times Y$ et $\|x\|=\sqrt{X^\intercal \times X}$.

Propriété 12 : Changement de base orthonormale

Soit E euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases orthonormales.

(i) *Si $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $P^{-1}=P^\intercal$.*

(ii) *Si $u\in\mathscr{L}(E)$, la formule de changement de base s'écrit*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)=P^\intercal\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\ P$$

(iii) $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'=\pm 1.$

Remarque

R 28 – ⚠ La réciproque est fausse, il ne suffit pas que ce déterminant vale ± 1 pour que les bases soient orthonormales.

R 29 – Faciles, les changements de bases orthonormales !!!

3 Propriétés de $F^\perp$

Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf

Si F est un sev de **dimension finie** *de E préhilbertien réel, alors*

$$E=F\oplus F^\perp=F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

Le sev $F^\perp$ est alors appelé **supplémentaire orthogonal** *de F, il est unique.*

Corollaire 6

Soit E un espace ***euclidien****, F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

(i) $\dim F^\perp=\dim E-\dim F$ (iii) $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$

(ii) $(F^\perp)^\perp=F$ (iv) $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$

Exercice 7 : CCINP 77

Soit E un espace euclidien.

1. **Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $(A^\perp)^\perp=A$.**
2. **Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.**
   (a) **Démontrer que $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.**
   (b) **Démontrer que $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.**

Exercice 8 : CCINP 92

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On pose : $\forall (A,B)\in E^2$, $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A^\intercal B)$ où tr désigne la trace et $A^\intercal$ désigne la transposée de la matrice A.

1. **Prouver que $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur**

E.

2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\mathsf{T} = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.

4 Projections orthogonales

Définition 16 : Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.
On appelle **projecteur orthogonal sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque

R 30 – Cette définition est justifiée par le fait que $E = F \oplus F^\perp$.

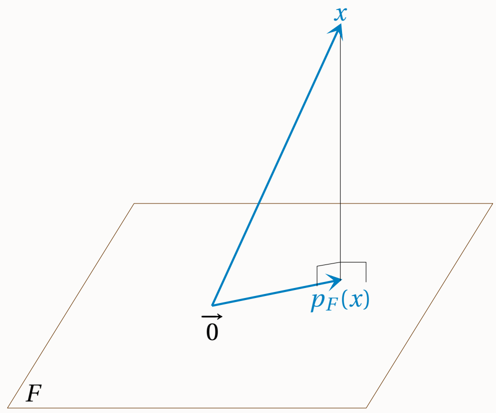
Propriété 13 : des projections orthogonales

- $p_F \in \mathscr{L}(E)$ et $p_F = p_F^2$
- $F = \operatorname{Im} p_F = \operatorname{Ker}(p_F - id_E)$
- $F^\perp = \operatorname{Ker} p_F$
- $\operatorname{Im} p_F \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p_F = E$
- $\forall x \in E,$

$$p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^\perp.$$

Remarque

R 31 – Illustration :



R 32 – Le projeté orthogonal de $x \in E$ est le seul vecteur $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Pratique pour le trouver !

Exercice 9 : CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Propriété 14 : Expression en base orthonormale

*Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, $(e_1, \ldots, e_p)$ une **base orthonormale** de F. Alors*

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) =$$

Remarque

R 33 – On peut voir le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projection : nous cherchions un vecteur $\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$ i.e.

$$e_j = \varepsilon_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k. \qquad (1)$$

Donc, si l'on note $F = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1})$, (1) est la décomposition de e_j dans $F^\perp \oplus F$. Donc

$\varepsilon_j = p_{F^\perp}(e_j)$ et $-\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k\varepsilon_k = p_F(e_j)$.
De plus, ici $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$ est une base orthogonale de F, donc $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|},\dots,\frac{\varepsilon_{j-1}}{\|\varepsilon_{j-1}\|}\right)$ en est une b.o.n. et $p_F(e_j) = \sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|}\middle|e_j\right)\frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} = \sum_{k=1}^{j-1}\frac{(\varepsilon_k|e_j)}{\|\varepsilon_k\|^2}\varepsilon_k$, d'où l'expression des λ_k que l'on avait trouvé.

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

- **Projection orthogonale sur une droite** : $D=\mathbb{R}a$, où $a\neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ est une base orthonormée de D et

  (Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)
- **Projection orthogonale sur un hyperplan** : $H=(\mathbb{R}a)^\perp$, où $a\neq 0_E$.

Exemple

E 17 – Soit $E=\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x-z=0$.
On note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de p_P ?

Remarque

R 34 – Si $\mathscr{B}$ (qui peut être choisie orthonormale) est une base adaptée à la décomposition $E=F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F)=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

où les p premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une base de $F=\mathrm{Ker}(p_F-\mathrm{id}_E)=\mathrm{Im}\,p_F$ et nous donnent les p premières colonnes avec des 1 sur la diagonale, et les $n-p$ autres forment une base de $F^\perp=\mathrm{Ker}\,p_F$ et nous donnent les $n-p$ dernières colonnes nulles.

Propriété 15 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall x\in E,\quad \|p_F(x)\|\leqslant\|x\|$$

5 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E, alors, pour tout $x\in E$,

$$\mathrm{d}(x,F)=\inf_{y\in F}\mathrm{d}(x,y)=\inf_{y\in F}\|x-y\|.$$

Propriété 16 : Expression de la distance à un sevdf

*Soit F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E, et $x\in E$.*
Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F , et seulement en ce vecteur :

$$\mathrm{d}(x,F)=\mathrm{d}(x,p_F(x))=\|x-p_F(x)\|$$

et si $\mathrm{d}(x,F)=\|x-y\|$ avec $y\in F$, alors $y=p_F(x)$.
De plus, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une b.o.n. de F,

$$\mathrm{d}(x,F)^2=$$

Si, enfin, $F^\perp$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1},\dots,e_n)$ une b.o.n. de $F^\perp$,

$$\mathrm{d}(x,F)^2=$$

Méthode 1 : Détermination pratique de $p_F(x)$

Plutôt que de calculer une b.o.n. de F (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y\in F$ tel que $x-y\in F^\perp$.
Connaissant une base quelconque de F, on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x-y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.
On résout et on trouve $y=p_F(x)$.

Remarque

R 35 – Si F n'est pas de dimension finie, cette distance n'est pas nécessairement atteinte. Ainsi, par exemple, si $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, alors $\mathrm{d}(\exp, F)$ n'est pas atteinte car on peut montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc cette distance est nulle. Ainsi, dire qu'elle serait atteinte serait dire que $\exp \in F$ ce qui est faux (trop de dérivées non nulles ?).

On peut d'ailleurs montrer plus généralement, que si $\mathrm{d}(x, F)$ est atteinte pour un $y \in F$, alors $x - y \in F^{\perp}$ et on peut montrer que si F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, $F^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 10 : CCINP 81

On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}(A^{\top} A')$, où $\mathrm{tr}(A^{\top} A')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. **Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. **Déterminer une base de $\mathscr{F}^{\perp}$.**
3. **Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^{\perp}$.**
4. **Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.**

Exercice 11 : CCINP 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. **Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. **Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.**

Corollaire 7 : Distance à un hyperplan

Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E de vecteur normal a : $H = (\mathbb{R}a)^{\perp}$.
Alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x, H) = \frac{|(a|x)|}{\|a\|}.$$

Si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est une équation de H dans une base $\mathscr{B}$ de E et si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base, alors

$$\mathrm{d}(x, H) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$