Espaces Préhilbertiens Réels

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I Produit scalaire et norme euclidienne

1 Définition d'un produit scalaire

Définition 1 : Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On appelle **produit scalaire sur** E toute *forme bilinéaire symétrique définie-positive*.

C'est-à-dire toute application

$$\varphi \colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

(i) **Bilinéarité** :

- **Linéarité à gauche** : Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire : $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$ $\varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda\varphi(x_2, y).$
- **Linéarité à droite :** Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire : $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$ $\varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda\varphi(x, y_2).$

(ii) **Symétrie** : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$

(iii) **Définie-positivité** :

- **Positivité :** $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0\,;$
- **Caractère défini :** $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$

Définition 2 : Espace préhilbertien réel, espace euclidien

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et si φ un produit scalaire sur E, on dit que (E, φ) est un **espace préhilbertien réel**.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *de dimension finie*, et si φ un produit scalaire sur E, on dit que (E, φ) est un **espace euclidien**.

2 Exemples

a Sur $\mathbb{R}^n$

Définition 3 : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on définit

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$.

b Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition 4 : Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour des vecteurs A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$(A|B) = \operatorname{tr}(A^\mathsf{T} \times B).$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un espace euclidien : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c Sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$

Définition 5 : Produit scalaire canonique pour fonctions continues

Pour des fonctions f et g de $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $a < b$, on définit

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$(\cdot|\cdot)$ fait de $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ un espace préhilbertien réel : c'est le **produit scalaire canonique** sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$

3 Norme euclidienne

a Définition

Définition 6 : Norme euclidienne

Soit $(E,|)$ un espace préhilbertien réel.
Pour tout vecteur x de E, on pose

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

b Identités remarquables et polarisation

Propriété 1 : Identités remarquables

Soit E un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

(*ii*) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$

(*iii*) ***Identité du parallélogramme*** (*HP*)
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Propriété 2 : Identités de polarisation

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire.
Pour tous vecteurs x et y de E,

(*i*) $(x|y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

(*ii*) $(x|y) = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

c Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E,|)$ un espace préhilbertien réel.
Alors

$$\forall x,y \in E,\quad (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y),$$

ou encore,

$$\forall x,y \in E,\quad |(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés (i.e. $y=0$ ou $\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad x=\lambda y$)

d Inégalité triangulaire

Propriété 3 : Inégalité de Minkowski

Soit $(E,|)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall x,y\in E,\quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés (i.e. $y=0$ ou $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\ x=\lambda y$)

Corollaire 1 : Double inégalité

Soit $(E,|)$ un espace préhilbertien réel, de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$. Alors

$$\forall x,y\in E,\quad \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

e Norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition 7 : Norme

On appelle **norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel** E, toute application $N : E\to\mathbb{R}$ telle que

Défini-positivité

- $\forall x\in E,\quad N(x)\geqslant 0$
- $\forall x\in E,\quad N(x)=0 \iff x=0_E$

Homogénéité $\forall x\in E,\quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad N(\lambda x) = |\lambda|\,N(x)$

Inégalité triangulaire
$\forall x,y\in E,\quad N(x+y)\leqslant N(x)+N(y)$

Propriété 4 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

Définition 8 : Vecteur normé

Un vecteur x d'un espace préhilbertien E est dit **normé**, ou **unitaire** si $\|x\|=1$.

Définition 9 : Distance euclidienne et écart angulaire

Étant donné des vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E, on définit :

- la **distance euclidienne** $\mathrm{d}(x,y)$ par $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$,
- si x et y sont non nuls, l'**écart angulaire** θ est le réel défini par

$$\theta\in[0,\pi] \text{ et } \cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Définition 10 : Distance à une partie non vide

Si A est une partie non vide de E préhilbertien réel, et $x \in E$, on définit la distance de x à A par

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf_{y \in A} \left(\mathrm{d}(x, y)\right) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

II Orthogonalité

1 Vecteurs orthogonaux

Définition 11 : Vecteurs orthogonaux

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.

x et y sont dit **orthogonaux** si et seulement si $(x|y) = 0$. On écrit parfois $x \perp y$.

Théorème 2 : Théorème de Pythagore

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, x et y des vecteurs de E.

$$(x|y) = 0 \iff x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2 Famille orthonormale

Définition 12 : Familles orthogonale et orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \dots, v_p) \in E^p$.

$(v_1, \dots, v_p)$ est une **famille orthogonale** de E si et seulement si

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!], \text{ avec } i \neq j, \quad (v_i|v_j) = 0 \quad (\text{ie } v_i \perp v_j).$$

$(v_1, \dots, v_p)$ est une **famille orthonormale** de E si et seulement si

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!], \quad (v_i|v_j) = \delta_{i,j}$$

Propriété 5 : orthogonale + non nuls ⇒ libre

Toute famille orthogonale *de vecteurs* non nuls *(en particulier toute famille orthonormale) d'un espace préhilbertien réel est libre.*

Corollaire 2 : Nombre maximal de vecteurs orthogonaux

Si E est un espace euclidien de dimension n, il n'existe pas de famille orthogonale de plus de n vecteurs non nuls.

Théorème 3 : Théorème de Pythagore

Soit, dans un espace préhilbertien réel E, une famille orthogonale $(v_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$. On a

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

Attention : la réciproque n'est vraie que pour $p = 2$.

3 Ensembles orthogonaux

Définition 13 : Parties orthogonales

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et A, B des parties non vides de E.

On dit que A est ***orthogonale*** à B si et seulement si $\forall (a, b) \in A \times B, \quad (a|b) = 0$.

On note $A \perp B$.

Propriété 6 : Intersection de parties orthogonales

Si $A, B \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ sont orthogonales, alors $A \cap B = \varnothing$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.

4 Orthogonal d'une partie

Définition 14 : Orthogonal d'une partie

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et A une partie non vide de E. On définit l'**orthogonal de** A comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \quad (x|y) = 0\}$$

$$x \in A^\perp \iff x \in E \text{ et } \forall y \in A, \quad (x|y) = 0$$

Il s'agit de la plus grande partie de E (pour l'inclusion) orthogonale à A.

Propriété 7 : Décroissance de l'orthogonal

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et A, B des parties non vides de E.

Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Propriété 8 : L'orthogonal est un sev

Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel, et A une partie non vide de E.
$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
De plus, $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

Corollaire 3 : Orthogonal et famille génératrice

Soit F un sous-espace de E préhilbertien réel.
Si $F = \operatorname{Vect} A$ (A engendre F) et si x est un vecteur de E,

$$x \in F^\perp \iff \forall\, a \in A,\quad (x|a) = 0$$

Propriété 9

Soit E un espace préhilbertien réel, F sous-espace vectoriel de E.

- $E^\perp = \{0_E\}$ *et* $\{0_E\}^\perp = E$.
- $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$,

III Espaces ou sous-espaces euclidiens

Rappel : Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Base orthonormale

Théorème 4 : Existence de base orthonormale

Tout espace euclidien non réduit à 0_E admet une base orthonormale (abrégé en b.o.n.).

Définition 15 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Étant donné $(E, |)$ un espace euclidien, et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E :

1. On pose $\varepsilon_1 = e_1$.
2. Par récurrence, pour $j \geqslant 2$, on cherche des réels λ_k tels que le vecteur
$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k \varepsilon_k$$
soit orthogonal à tous les ε_i pour $i \in [\![1, j-1]\!]$:
$$\forall\, i < j,\quad (\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0.$$
3. On normalise les vecteurs :
$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|},\dots,\frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right).$$

Propriété 10

On obtient ainsi que $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que pour tout j, $\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_j) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j)$ et la composante sur e_j de ε_j vaut 1.

On a alors $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|},\dots,\frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\right)$ est une b.o.n de E.

Corollaire 4 : Existence de b.o.n.

Tout sous-espace vectoriel non nul d'un espace euclidien admet une base orthonormale.

Corollaire 5 : Théorème de la b.o.n. incomplète

Tout famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une b.o.n. de cet espace.

2 Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormale

Propriété 11 : Expression en b.o.n.

*Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une **base orthonormale** de E : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Alors*

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\quad x_i = (e_i|x)$$

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Propriété 12 : Changement de base orthonormale

Soit E euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ des bases orthonormales.

(i) *Si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $P^{-1} = P^\top$.*

(ii) *Si $u \in \mathscr{L}(E)$, la formule de changement de base s'écrit*
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^\top \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\ P$$

(iii) $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' = \pm 1$.

3 Propriétés de $F^\perp$

Théorème 5 : Supplémentarité de l'orthogonal d'un sevdf

Si F est un sev de **dimension finie** *de E préhilbertien réel, alors*

$$E = F \oplus F^\perp = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

Le sev $F^\perp$ est alors appelé **supplémentaire orthogonal** *de F, il est unique.*

Corollaire 6

Soit E un espace **euclidien**, *F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

(*i*) $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ (*iii*) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

(*ii*) $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ (*iv*) $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

4 Projections orthogonales

Définition 16 : Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace de E **de dimension finie**.

On appelle **projecteur orthogonal sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

Propriété 13 : des projections orthogonales

- $p_F \in \mathscr{L}(E)$ *et* $p_F = p_F^2$
- $F = \operatorname{Im} p_F = \operatorname{Ker}(p_F - id_E)$
- $F^\perp = \operatorname{Ker} p_F$
- $\operatorname{Im} p_F \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} p_F = E$
- $\forall x \in E, \quad p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^\perp$.

Propriété 14 : Expression en base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_p)$ une ***base orthonormale*** *de F. Alors*

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x) e_i$$

À savoir retrouver plutôt que de connaître par cœur :

- **Projection orthogonale sur une droite** : $D = \mathbb{R}a$, où $a \neq 0_E$. Alors $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ est une base orthonormée de D et

$$p_D : x \mapsto \left(\frac{1}{\|a\|}a \middle| x\right)\left(\frac{1}{\|a\|}a\right) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

(Attention à ne pas oublier le $\|a\|^2$...)

- **Projection orthogonale sur un hyperplan** : $H = (\mathbb{R}a)^\perp$, où $a \neq 0_E$.

$$p_H : x \mapsto x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2}a.$$

Propriété 15 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall x \in E, \quad \left\|p_F(x)\right\| \leqslant \|x\|$$

5 Distance à un sous-espace

On a vu que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E, alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in F} \mathrm{d}(x,y) = \inf_{y\in F} \left\|x-y\right\|.$$

Propriété 16 : Expression de la distance à un sevdf

Soit F est un sous-espace vectoriel ***de dimension finie*** *d'un espace préhilbertien E, et $x \in E$.*

Alors la distance de x à F est atteinte en le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F , et seulement en ce vecteur :

$$\mathrm{d}(x,F) = \mathrm{d}(x, p_F(x)) = \left\|x - p_F(x)\right\|$$

et si $\mathrm{d}(x,F) = \left\|x-y\right\|$ *avec* $y \in F$, *alors* $y = p_F(x)$.

De plus, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une b.o.n. de F,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)^2.$$

Si, enfin, $F^\perp$ est aussi de dimension finie et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une b.o.n. de $F^\perp$,

$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \left\|p_{F^\perp}(x)\right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (e_k|x)^2.$$

Méthode 1 : Détermination pratique de $p_F(x)$

Plutôt que de calculer une b.o.n. de F (orthonormalisation de Gram-Schmidt), il peut être plus économique d'écrire que $p_F(x)$ est le seul vecteur de $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Connaissant une base quelconque de F, on décompose y dans cette base et on traduit l'orthogonalité de $x - y$ à chaque vecteur de la base : autant d'équation que d'inconnues.

On résout et on trouve $y = p_F(x)$.

Corollaire 7 : Distance à un hyperplan

Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E de vecteur normal a : $H = (\mathbb{R}a)^{\perp}$.

Alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x, H) = \frac{|(a|x)|}{\|a\|}.$$

Si $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est une équation de H dans une base $\mathscr{B}$ de E et si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base, alors

$$\mathrm{d}(x, H) = \frac{|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$