

# Moments des variables aléatoires

On rappelle qu'une variable aléatoire finie est une application  $X : \Omega \rightarrow E$  prenant un nombre fini de valeur.

Si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace probablisé, la loi de  $X$  est l'application  $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \mapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ , déterminée par les  $\mathbb{P}(X = x)$  pour  $x \in X(\Omega)$ .

## 1 ESPÉRANCE

### 1 Définition

#### Définition 1 : Espérance d'une variable aléatoire

Soit  $X$  une variable aléatoire finie à valeur dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On appelle **moyenne** ou **espérance mathématique** de  $X$  le nombre

#### Remarque

**R1** – La notion d'espérance est une notion relative à la loi de  $X$  seulement : deux variables aléatoires de même loi ont même espérance (sauf dans le cas particulier de la loi uniforme pour laquelle les valeurs ne sont pas fixées par la loi).

**R2** – Il s'agit de la moyenne des valeurs prises par  $X$ , pondérées par la probabilité d'obtenir ces valeurs. Ainsi, c'est la valeur que l'on peut espérer voir prendre  $X$  en moyenne.

#### Propriété 1 : Autre formule de l'espérance

Pour toute variable aléatoire réelle ou complexe finie,

#### Exercice 1 : CCINP 104

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.  
On dispose de  $n$  boules numérotées de 1 à

$n$  et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les  $n$  boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les  $n$  boules.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par  $X$ .
2. (a) Déterminer la probabilité  $P(X = 2)$ .  
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
3. (a) Calculer  $E(X)$ .  
(b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$ . Interpréter ce résultat.

#### Définition 2 : Variable aléatoire centrée

Une variable aléatoire  $X$  finie est dite **centrée** lorsque

Pour toute variable aléatoire  $X$  finie,  $X - E(X)$  est appelée **variable aléatoire centrée associée** à  $X$ .

## 2 Propriétés

#### Propriété 2 : de l'espérance

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires finies,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(i) Si  $X$  est une variable aléatoire constante :  $X \equiv a \in \mathbb{R}$ , alors  $E(X) =$

(ii) Si  $A$  est un événement,  $E(\mathbb{1}_A) =$

(iii) **Linéarité** :

(iv)  $X - E(X)$  est centrée.

(v) **Positivité** : Si  $X$  est réelle telle que  $X \geq 0$ ,

Si, de plus,  $E(X) = 0$ , alors

(vi) **Croissance** :



(vii) **Inégalité triangulaire :**

### Propriété 3 : Inégalité de Markov

Si  $X$  est une variable aléatoire **réelle positive** finie,  $a > 0$ ,

#### Remarque

R3 – Autre formulation possible : si  $X$  variable aléatoire réelle ou complexe et  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

## 3 Espérance et lois usuelles

### Propriété 4 : Espérance et lois usuelles

(i) Si  $X \sim \mathcal{U}(n)$ , alors  $\mathbb{E}(X) =$

(moyenne arithmétique).

Dans le cas courant où  $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$ ,  
 $\mathbb{E}(X) =$

(ii) Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , alors  $\mathbb{E}(X) =$

(iii) Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $\mathbb{E}(X) =$

#### Remarque

R4 – Le cas de Bernoulli a déjà été vu pour  $X = 1_A$  !

## 4 Espérance d'une fonction de variable aléatoire

### Propriété 5 : Formule de transfert

Si  $X$  variable aléatoire finie et  $f$  telle que  $f(X)$  ait un sens, alors

#### Remarque

R5 – Pas besoin de connaître la loi de  $f(X)$  !

R6 – S'applique en particulier aussi à des couples voire des  $n$ -uplets de variables aléatoires : si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires,  $f$  telle que  $f(X, Y)$  ait un sens,

$$\mathbb{E}(f(X, Y)) =$$

## 5 Espérance et indépendance

### Propriété 6 : Espérance et indépendance

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires **indépendantes**,

*La réciproque est fautive en général.*

## II VARIANCE, ÉCART-TYPE, CO-VARIANCE

Dans cette section, les variables aléatoires sont à **valeurs réelles**.

Les moments d'une variable aléatoire  $X$  sont les nombres  $\mathbb{E}(X^p)$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Le moment d'ordre 1 est l'espérance, et le moment d'ordre 2 va conduire à la définition de la variance.

## 1 Variance et écart-type

### Définition 3 : Variance, écart-type, variable réduite

Soit  $X$  un variable aléatoire réelle finie. On appelle **variance** de  $X$  le nombre

On appelle **écart-type** de  $X$  le nombre

Lorsque  $\mathbb{V}(X) = 1$ ,  $X$  est dite **réduite**.

**Remarque**

**R7** –  $V(X)$  est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire centrée associée à  $X$  :  $X - \mathbb{E}(X)$ . Par positivité de l'espérance,  $V(x) \geq 0$  donc l'écart-type est bien défini.

**R8** – L'écart-type s'interprète comme une distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$  entre le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs prises par  $X$  et le vecteur dont toutes les coordonnées valent  $\mathbb{E}(X)$ . C'est donc un indicateur de dispersion de  $X$  autour de sa moyenne  $\mathbb{E}(X)$ .

**R9** – D'après la formule de transfert, si les valeurs prises par  $X$  sont  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$V(X) =$$

**R10** – Plus la variance (et donc l'écart-type) est petit, plus  $X$  est concentrée autour de sa moyenne  $\mathbb{E}(X)$ . Le cas extrême est pour une variable aléatoire constante :  $V(X) = 0$ .

Réciproquement, que se passe-t-il si  $V(X) = 0$  ?

## 2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

### Propriété 8 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle finie,  $a > 0$ .

**Remarque**

**R12** – Le  $a^2$  est logique pour des raisons d'homogénéité (dimension).

**R13** – On retrouve avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, le fait que si  $V(X) = 0$ ,

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = 0$$

Donc, comme  $X(\Omega)$  est fini,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 0) = 0,$$

c'est-à-dire  $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$ .

**R14** – En particulier,  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < a) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}$ .

### Propriété 7 : de la variance et de l'écart-type

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle finie.

(i) **Théorème de Kœnig-Huygens** :

(ii) Si  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

(iii) Si  $\sigma(X) \neq 0$ ,  $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à  $X$** .

**Remarque**

**R11** – La deuxième formule est intuitive au sens où une translation des valeurs de  $X$  ne perturbe la distance à la moyenne, et comme cette distance est au carré, une homothétie de rapport  $a$  la multiplie par  $a^2$ .

### Exercice 2 : CCINP 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. Soit  $(Y_n)$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ . Prouver que

$$\forall a \in ]0, +\infty[, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

3. Application : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite  $(Y_i)$  de variables aléatoires de Bernoulli où  $Y_i$  mesure l'issue du  $i^{\text{ème}}$  tirage.



### 3 Covariance

#### Définition 4 : Covariance

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles finies.

On appelle **covariance** du couple  $(X, Y)$  le nombre

Lorsque  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ,  $X$  et  $Y$  sont dites **non corrélées**.

#### Remarque

**R15** – La covariance mesure la corrélation entre les variations de  $X$  et de  $Y$  dans le sens où elle est positive lorsque  $X$  et  $Y$  s'écartent de leur moyenne dans le même sens, et négative si c'est dans le sens opposé.

**R16** – Cela ressemble à un produit scalaire et ce n'est pas un hasard ! On vérifie facilement qu'il s'agit d'une forme bilinéaire positive. La variance correspond au carré de la « norme » (et donc l'écart-type à la « norme ».)

Cela permet par exemple d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (mais sans le cas d'égalité) :

#### Propriété 9 : de la covariance

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles finies.

(i)  $\text{Cov}$  est une

(ii) **Théorème de Kœnig-Huygens** :

(iii)  $\mathbb{V}(X + Y) =$

(iv) Si  $X \perp Y$ ,

#### Remarque

**R17** –  $\text{Cov}(X, X) = 0 \implies X$  constante presque sûrement.

**R18** –  $\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \text{Cov}\left(\frac{X}{\sigma(X)} \times \frac{Y}{\sigma(Y)}\right)$  est le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$ .

### 4 Variance d'une somme de variables aléatoires

#### Propriété 10 : Variance d'une somme

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires réelles finies.

(i)  $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) =$

(ii) Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes deux à deux,

$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) =$

En particulier, si  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a.i.d.,  
 $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) =$

### 5 Cas des lois usuelles

#### Propriété 11 : Variance des lois usuelles

(i) Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$ ,  $\mathbb{V}(X) =$

(ii) Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ ,  $\mathbb{V}(X) =$

#### Exercice 3 : CCINP 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

- Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.

On note  $Y$  le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

(a) Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.

- Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

(a) Déterminer la loi de  $X$ .

(b) Déterminer la loi de  $Y$ .

**Exercice 4 : CCINP 98**

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers  $n$  correspondants distincts.

On admet que les  $n$  appels constituent  $n$  expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ).

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de  $X$ . Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des  $n - X$  correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

(a) Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(Y = k | X = i)$ .

(b) Prouver que  $Z = X + Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :

$$\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

(c) Déterminer l'espérance et la variance de  $Z$ .

**Exercice 5**

Variance de  $X \sim \mathcal{U}(n)$  sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?

**6 Formulaire**

■ Loi de  $X$  :

$$\mathbb{P}_X : A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

déterminée par  $\mathbb{P}(X = x)$  pour  $x \in X(\Omega)$ .

■ Espérance de  $X$  :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).$$

■ Formule de transfert :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)f(x).$$

■ Variance de  $X$  :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

■ Covariance de  $X$  et  $Y$  :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

■ Variance d'une somme :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

■ Inégalité de Markov :

$$\text{Si } X \geq 0 \text{ et } a > 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

■ Inégalité de Bienaymé-Tchebbychev :

$$\text{Si } a > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

■ Loi de Bernoulli :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q, \mathbb{E}(X) = p, \mathbb{V}(X) = pq.$$

■ Loi binomiale :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \mathbb{E}(X) = np, \mathbb{V}(X) = npq.$$