Moments des variables aléatoires

On rappelle qu'une variable aléatoire finie est une application $X:\Omega\to E$ prenant un nombre fini de valeur.

Si $(\Omega,\mathbb{P})$ est un espace probabilisé, la loi de X est l'application $\mathbb{P}_X : A\in\mathscr{P}(X(\Omega))\mapsto \mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}(X\in A)$, déterminée par les $\mathbb{P}(X=x)$ pour $x\in X(\Omega)$.

I Espérance

1 Définition

Définition 1 : Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire finie à valeur dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **moyenne** ou **espérance mathématique** de X le nombre

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\cdot x=\sum_{x\in\mathbb{K}}\mathbb{P}(X=x)\cdot x.$$

Propriété 1 : Autre formule de l'espérance

Pour toute variable aléatoire réelle ou complexe finie,

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).$$

Définition 2 : Variable aléatoire centrée

Une variable aléatoire X finie est dite **centrée** lorsque $\mathbb{E}(X)=0$.

Pour toute variable aléatoire X finie, $X-\mathbb{E}(X)$ est appelée **variable aléatoire centrée associée à** X.

2 Propriétés

Propriété 2 : de l'espérance

Soit X,Y deux variables aléatoires finies, $\lambda\in\mathbb{R}$.

(i) *Si X est une variable aléatoire constante : $X\equiv a\in\mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X)=a$.*

(ii) *Si A est un événement, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)=\mathbb{P}(A)$.*

(iii) ***Linéarité*** *: $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(\lambda X)=\lambda\mathbb{E}(X)$.*

(iv) *$X-\mathbb{E}(X)$ est centrée.*

(v) ***Positivité*** *: Si X est réelle telle que $X\geqslant 0$, $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.*
Si, de plus, $\mathbb{E}(X)=0$, alors X est nulle presque sûrement, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X=0)=1$ (ie $\mathbb{P}(X>0)=0$).

(vi) ***Croissance*** *: Si X et Y sont réelles telles que $X\leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$.*

(vii) ***Inégalité triangulaire*** *: $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(|X|)$.*

Propriété 3 : Inégalité de Markov

*Si X est une variable aléatoire **réelle positive** finie, $a>0$,*

$$\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

3 Espérance et lois usuelles

Propriété 4 : Espérance et lois usuelles

(i) *Si $X\sim\mathscr{U}(n)$, alors $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{n}\sum_{x\in X(\Omega)}x$ (moyenne arithmétique).*
Dans le cas courant où $X(\Omega)=[\![a,b]\!]$, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

(ii) *Si $X\sim\mathscr{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X)=p$.*

(iii) *Si $X\sim\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X)=np$.*

4 Espérance d'une fonction de variable aléatoire

Propriété 5 : Formule de transfert

Si X variable aléatoire finie et f telle que $f(X)$ ait un sens, alors

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)f(x)$$

5 Espérance et indépendance

Propriété 6 : Espérance et indépendance

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes,

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

La réciproque est fausse en général.

II Variance, écart-type, covariance

Dans cette section, les variables aléatoires sont **à valeurs réelles**.

Les moments d'une variable aléatoire X sont les nombres $\mathbb{E}(X^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Le moment d'ordre 1 est l'espérance, et le moment d'ordre 2 va conduire à la définition de la variance.

1 Variance et écart-type

Définition 3 : Variance, écart-type, variable réduite

Soit X un variable aléatoire réelle finie. On appelle **variance** de X le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

On appelle **écart-type** de X le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}$$

Lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$, X est dite **réduite**.

Propriété 7 : de la variance et de l'écart-type

Soit X une variable aléatoire réelle finie.

(i) ***Théorème de Kœnig-Huygens*** *:*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

(ii) *Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(x)$ donc $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.*

(iii) *Si $\sigma(X) \neq 0$, $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à** X.*

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 8 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle finie, $a > 0$.

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

3 Covariance

Définition 4 : Covariance

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles finies.

On appelle **covariance** du couple (X, Y) le nombre

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, X et Y sont dites **non corrélées**.

Propriété 9 : de la covariance

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles finies.

(i) *Cov est une forme bilinéaire positive.*

(ii) ***Théorème de Kœnig-Huygens*** *:*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

(iii) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$.

(iv) *Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et la réciproque est fausse.*

4 Variance d'une somme de variables aléatoires

Propriété 10 : Variance d'une somme

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles finies.

(i) $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)$.

(ii) *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes deux à deux,*

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n).$$

En particulier, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des vaiid, $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = n\mathbb{V}(X_1)$.

5 Cas des lois usuelles

Propriété 11 : Variance des lois usuelles

(i) *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, $\mathbb{V}(X) = p(1 - p) = pq$.*

(ii) *Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, $\mathbb{V}(X) = np(1 - p) = npq$.*