

Sous-espaces affines

Extrait du programme officiel :

Le but de cette partie, qu'il convient d'illustrer par de nombreuses figures, est double :

- *montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.*
- *modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.*

CONTENUS

Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.

Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.

Intersection de sous-espaces affines.

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\text{Ker } u$.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Sous-espaces affines de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.



Table des matières

32 Sous-espaces affines	1
I Structure affine : points et vecteurs	2
1 Généralités	2
2 Deux visions d'un même espace vectoriel	3
II Translations d'un espace vectoriel	3
III Sous-espace affine d'un espace vectoriel	3
IV Solutions des problèmes linéaires	5

I STRUCTURE AFFINE : POINTS ET VECTEURS

1 Généralités

On sait en géométrie classique, plane ou spatiale, qu'un élément de \mathbb{R}^2 , \mathbb{C} ou \mathbb{R}^3 peut indifféremment représenter un vecteur ou un point.

On peut généraliser cela à tout espace vectoriel.

Les trois principes fondamentaux sont les suivants :

- Tout couple de points (A,B) permet de former un unique vecteur noté \vec{AB} ,
- Un point A étant fixé, tout vecteur \vec{v} s'écrit \vec{AB} pour un certain point B unique,
- Pour tous points A,B,C, on a la relation de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Plus formellement, si on note \mathcal{E} l'ensemble des points et \vec{E} l'ensemble des vecteurs, les deux premiers points se traduisent par :

- On a une application $\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}^2 \longrightarrow \vec{E} \\ (A,B) \longmapsto \vec{AB} \end{array} \right\}$,
- Un point A étant fixé, l'application $\left. \begin{array}{l} \mathcal{E} \longrightarrow \vec{E} \\ B \longmapsto \vec{AB} \end{array} \right\}$ est bijective.

\vec{E} est la **direction** de \mathcal{E} , la **dimension** de \mathcal{E} est celle de sa direction \vec{E} .

On se permet alors d'ajouter un vecteur à un point : si $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} \in \vec{E}$, on a un unique B tel que $\vec{v} = \vec{AB}$ et on pose alors

$$A + \vec{v} = A + \vec{AB} = B$$

(penser à une translation, ou aux coordonnées/affixes!)

2 Deux visions d'un même espace vectoriel

On peut appliquer cela à n'importe quel espace vectoriel E .

Les éléments de E pourront désigner, suivant le contexte, soit des points (notés en majuscule A, B, C, \dots), soit des vecteurs (notés en minuscule u, v, w, \dots).

On pose $\overrightarrow{AB} = B - A$. (Penser aux coordonnées/affixes à nouveau!)

Cela permet de retrouver $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Les opérations suivantes ont un sens géométrique :

- ajouter deux vecteurs (mais pas deux points) : on obtient un vecteur,
- ajouter un point à un vecteur (et non l'inverse) : on obtient un point,
- retrancher deux points : on obtient un vecteur.

Le vecteur nul permet de passer de point à vecteur : $\overrightarrow{0_E A} = A - 0_E = A$

Cela traduit exactement notre manière de dessiner des espaces vectoriels dans le plan ou l'espace!

III TRANSLATIONS D'UN ESPACE VECTORIEL

Définition 1 : Translation

Soit E un espace vectoriel et $u \in E$ un vecteur fixé. On appelle **translation de vecteur u** l'application

$$t_u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + u \end{cases}$$

On note $\mathcal{T}(E)$ l'ensemble des translations de E .

Remarque

R1 – Avec le point de vue vectoriel, c'est juste l'addition de deux vecteurs.
Avec le point de vue affine, $A \mapsto B = A + u$ on retrouve la notion géométrique de translation.

R2 – Une translation n'est presque jamais linéaire!

R3 – Si $u, v \in E$,

$$\begin{cases} t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_v \circ t_u \\ t_u \text{ bijectif et } t_u^{-1} = t_{-u} \end{cases}$$

R4 – $(\mathcal{T}(E), \circ)$ a une structure de groupe (sous-groupe de $(\mathcal{G}(E), \circ)$.)

III SOUS-ESPACE AFFINE D'UN ESPACE VECTORIEL

Définition 2 : Sous-espace affine, direction, dimension

On appelle **sous-espace affine** de E toute partie \mathcal{F} de E tel qu'il existe $x_0 \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que

$$\mathcal{F} = x_0 + F = \{x_0 + y, y \in F\}.$$

\mathcal{F} est l'image de F par la translation de vecteur x_0 .

Avec les notations affines :

$$\mathcal{F} = A + \vec{F} = \{A + \vec{v}, \vec{v} \in \vec{F}\}$$



où A est un point de E et \vec{F} un sous-espace vectoriel de E .

\vec{F} s'appelle la **direction** de \mathcal{F} . Par définition, la **dimension** de \mathcal{F} est celle de \vec{F} . Les vecteurs de \vec{F} sont appelés vecteurs directeurs de \mathcal{F} .

Remarque

- R5 – Avec des notations vectorielles, $x \in \mathcal{F}$ si et seulement si $x - x_0 \in F$.
Avec des notations affines, $B \in \mathcal{F}$ si et seulement si $B - A = \vec{AB} \in \vec{F}$.
- R6 – Un sous-espace affine n'est jamais vide !

Propriété 1 : Description de la direction

La direction

$$\vec{F} = \{ \vec{AB} = B - A \mid B \in \mathcal{F} \} = \{ \vec{BC} = C - B \mid B, C \in \mathcal{F} \}$$

du sous-espace affine \mathcal{F} est unique.

En revanche, on peut remplacer A par n'importe quel point de \mathcal{F} .

Remarque

- R7 – Avec les notations vectorielles, $F = \{x - x_0 \mid x \in \mathcal{F}\} = \{x - x' \mid x, x' \in \mathcal{F}\}$ et on peut remplacer x_0 par n'importe quel autre élément de \mathcal{F} .

Démonstration

(i) Avec les notations affines :

- Si $\vec{v} \in \vec{F}$, alors $\vec{v} = \vec{BC}$ avec $B = A \in \mathcal{F}$ et $C = A + \vec{v} \in \mathcal{F}$.
- Si $B, C \in \mathcal{F}$, alors on a $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{F}$ tels que $B = A + \vec{v}$ et $C = A + \vec{w}$, alors

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{v} - \vec{w} \in \mathcal{F}.$$

(ii) Avec les notations vectorielles, on montre que si $x'_0 \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = x_0 + F = x'_0 + F$.

- Si $x \in \mathcal{F}$, $x - x'_0 = (x - x_0) - (x'_0 - x_0) \in F$ car F est un espace vectoriel.
- La réciproque est vraie par symétrie. ■

Exemple

- E1 – Points.
- E2 – Hyperplans affines.
 - Droite de \mathbb{R}^2 : $\mathcal{D} : 2x + 3y = 5$
 - Plan de \mathbb{R}^3 : $\mathcal{P} : 2x + 3y + z = 6$
- E3 – Droites de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Propriété 2 : Intersection de sous-espaces affines

L'intersection de deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de direction F et G est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Démonstration

Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{F} = A + \vec{F}$ et $\mathcal{G} = A + \vec{G}$

$$M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{F} \cap \vec{G}$$

Comme $\vec{F} \cap \vec{G}$ est un espace vectoriel, on en déduit que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $\vec{F} \cap \vec{G}$. ■

Définition 3 : Parallélisme

Un sous-espace affine \mathcal{F} est dit **parallèle** à une autre sous-espace affine \mathcal{G} lorsque $\vec{F} \subset \vec{G}$.

Remarque

R8 – Une droite peut être parallèle à un plan, mais pas l'inverse !

IV SOLUTIONS DES PROBLÈMES LINÉAIRES

Définition 4 : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E .

Propriété 3 : Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire

L'ensemble des solutions de cette équation est

- soit vide (si $b \notin \text{Im } u$)
- soit un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } u$, donc de la forme

$$x_0 + \text{Ker } u$$

où x_0 est une solution particulière et $\text{Ker } u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.

Démonstration

S'il y a une solution x_0 , alors

$$u(x) = b = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \text{Ker } u \iff x \in x_0 + \text{Ker } u.$$

Exemple

- E4 – Équations différentielles linéaires
- E5 – Suites arithmético-géométriques.
- E6 – Systèmes linéaires.

E7 – Interpolation de Lagrange $u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{cases}$

Connaissant une solution P_0 , l'ensemble des solutions est $P_0 + \text{Ker } u$.