Sous-espaces affines

I Structure affine : points et vecteurs

1 Généralités

On se permet alors d'ajouter un vecteur à un point : si $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{v} \in \vec{E}$, on a un unique B tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et on pose alors

$$A + \vec{v} = A + \overrightarrow{AB} = B$$

2 Deux visions d'un même espace vectoriel

On peut appliquer cela à n'importe espace vectoriel E.

Les éléments de E pourront désigner, suivant le contexte, soit des points (notés en majuscule $A, B, C\dots$), soit des vecteurs (notés en minuscule $u, v, w\dots$).

On pose $\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A.}$

Cela permet de retrouver $\boxed{A + \overrightarrow{AB} = B.}$

Les opérations suivantes ont un sens géométrique :

- ajouter deux vecteurs (mais pas deux points) : on obtient un vecteur,
- ajouter un point à un vecteur (et non l'inverse) : on obtient un point,
- retrancher deux points : on obtient un vecteur.

II Translations d'un espace vectoriel

Définition 1 : Translation

Soit E un espace vectoriel et $u \in E$ un vecteur fixé. On appelle **translation de vecteur** u l'application

$$t_u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + u \end{array} \right.$$

On note $\mathscr{T}(E)$ l'ensemble des translations de E.

III Sous-espace affine d'un espace vectoriel

Définition 2 : Sous-espace affine, direction, dimension

On appelle **sous-espace affine** de E toute partie $\mathscr{F}$ de E tel qu'il existe $x_0 \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que

$$\mathscr{F} = x_0 + F = \{x_0 + y,\ y \in F\}.$$

$\mathscr{F}$ est l'image de F par la translation de vecteur x_0.

Avec les notations affines :

$$\mathscr{F} = A + \vec{F} = \{A + \vec{v}, \vec{v} \in \vec{F}\}$$

où A est un point de E et $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de E.

$\vec{F}$ s'appelle la **direction** de $\mathscr{F}$. Par définition, la **dimension** de $\mathscr{F}$ est celle de $\vec{F}$. Les vecteurs de $\vec{F}$ sont appelés vecteurs directeurs de $\mathscr{F}$.

Propriété 1 : Description de la direction

La direction

$$\vec{F} = \left\{\overrightarrow{AB} = B - A \middle| B \in \mathscr{F}\right\} = \left\{\overrightarrow{BC} = C - B \middle| B, C \in \mathscr{F}\right\}$$

du sous-espace affine $\mathscr{F}$ est unique.

En revanche, on peut remplacer A par n'importe quel point de $\mathscr{F}$.

Propriété 2 : Intersection de sous-espaces affines

L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de direction F et G est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Définition 3 : Parallélisme

Un sous-espaces affine $\mathscr{F}$ est dit **parallèle** à une autre sous-espace affine $\mathscr{G}$ lorsque $\vec{F} \subset \vec{G}$.

IV Solutions des problèmes linéaires

Définition 4 : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E.

Propriété 3 : Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire

L'ensemble des solution de cette équation est

- *soit vide (si $b \notin \operatorname{Im} u$)*
- *soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$, donc de la forme*

$$x_0 + \operatorname{Ker} u$$

où x_0 est une solution particulière et $\operatorname{Ker} u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.