33

Fonctions de deux variables

I Un Zeste de topologie

1 Boules et ouverts de $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Définition 1 : Boule ouverte

On appelle **boule ouverte de centre** $a \in \mathbb{R}^2$ **et de rayon** $r \in \mathbb{R}^+$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque

R 1 – A quoi ressemble $B\big((0,0),1\big)$? Et si on utilise une autre norme, comme $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$ ou $\|(x,y)\|_\infty = \max\big(|x|,|y|\big)$?

Définition 2 : Ouvert

Une partie $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite **ouverte** ou **un ouvert** de $\mathbb{R}^2$ lorsque

Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

Remarque

R 2 – Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de point « au bord ».
Ainsi, on peut s'approcher d'un point d'un ouvert dans toutes les directions en restant dans l'ouvert.

Exemple

E 1 – Une boule ouverte est ouverte.

E 2 – Le quart de plan $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x>0 \text{ et } y>0\}$ est-il ouvert ?

2 Fonctions de deux variables continues

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition 3 : Continuité

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue en** $(x_0,y_0) \in \mathscr{U}$ lorsque

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} f(x_0,y_0),$$

où $(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)$ signifie que $\|(x-x_0,y-y_0)\| \longrightarrow 0$, c'est-à-dire que $x \to x_0$ et $y \to y_0$ simultanément.

Remarque

R 3 – On aura des continuités automatiques avec les fonctions usuelles, notamment polynomiale, et les opérations habituelles conservent la continuité : combinaison linéaire, produit, composée...
L'étude de la continuité d'une fonction de deux variables n'est pas un attendu du programme.

Définition 4 : Applications partielles

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction, $(x_0,y_0) \in \mathscr{U}$.
On appelle **applications partielles de** f **en** (x_0,y_0) les applications $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x_0,y)$.

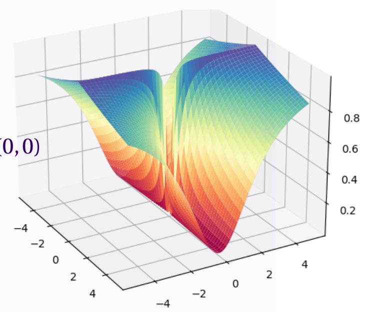
Remarque

R 4 – Le domaine de définition d'une application partielle peut être compliqué, mais c'est toujours un ouvert de $\mathbb{R}$.

R 5 – Si f est continue, les applications partielles $x \mapsto f(x,y_0)$ à y_0 fixé et $y \mapsto f(x_0,y)$ à x_0 fixé le sont. Cependant, leur continuité ne garantit pas celle de f (ce ne sont que deux directions particulières).

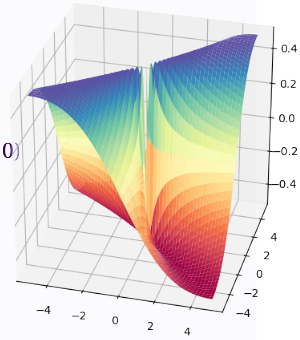
Exercice 1

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^2}{|x|+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Exercice 2

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



II Dérivées partielles

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

1 Dérivées partielles

Définition 5 : Dérivées partielles

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$.

On appelle **dérivées partielles de f en** (x_0, y_0), lorsqu'elles existent, les dérivées des applications partielles de f en (x_0, y_0) : $f_1 : x \mapsto f(x_0, y_0)$ et $f_2 : y \mapsto f(x_0, y_0)$.

On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0)$

Remarque

R6 – Comme on en a déjà l'habitude, calculer les dérivées partielles revient à fixer une coordonnée et dériver par rapport à l'autre variable.

$$\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$\frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} \xrightarrow[y \to y_0]{} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exercice 3

Dérivées partielles en tout point de

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont-elles continues en 0 ?

f est-elle continue en $(0,0)$?

Remarque

R7 – Et donc ⚠ l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité !

2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 6 : Classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$** lorsqu'en tout point de $\mathscr{U}$, les dérivées partielles de f existent, et que ces dérivées partielles sont continues.

On note $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété 1 : Structure

$\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Théorème 1 : DL$_1$

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h, y_0+k) \in \mathscr{U}$,

Corollaire 1 : $\mathscr{C}^1 \implies$ continue

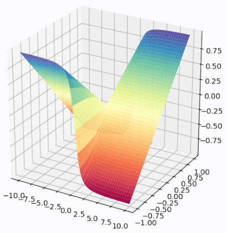
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.

Définition 7 : Plan tangent

Par analogie avec la tangente pour une fonction d'une seule variable, on appelle **plan tangent** à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point de coordonnées (x_0, y_0) le plan d'équation

Exercice 4 : CCINP 33

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **et** $f(0,0) = 0$.



1. **Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**
2. **Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.**
3. **f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.**

Définition 8 : Vecteur gradient

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$. On appelle **gradient** de f en (x_0, y_0) le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0) = \qquad .$$

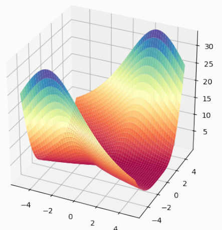
Lorsque $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, on dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f.

Propriété 2 : Expression du DL$_1$ avec le gradient

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in \mathscr{U}$,

Exercice 5 : CCINP 52

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$



1. **Prouver que :** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) **Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.**
   (b) **Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.**
3. **Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.**
   (a) **Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.**
   (b) **Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.**
   (c) **f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?**

Remarque : Interprétation géométrique

R 8 – On suppose que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
Notons S la sphère unité de $\mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \forall (h,k) \in S,\quad \big(\nabla f(x_0,y_0) \big| (h,k)\big) &\leqslant \big|\big(\nabla f(x_0,y_0) \big| (h,k)\big)\big| \\ &\leqslant \big\|\nabla f(x_0,y_0)\big\|\, \|(h,k)\| \\ &= \big\|\nabla f(x_0,y_0)\big\|. \end{aligned}$$

Or ce majorant est atteint pour

$$(h_0, k_0) = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\big\|\nabla f(x_0,y_0)\big\|}.$$

Ainsi le vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$ donne la direction et le sens de plus forte croissance de la fonction f.
C'est à la base d'algorithmes d'optimisation (descente de gradient), utilisé par exemple en Machine Learning (apprentissage automatique : intelligence artificielle).

Ci-dessus, on représente, au cœur de Mafate, des « lignes de niveau » de la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ qui au point de coordonnées (x,y) associe son altitude (on parle d'isoplèthes d'altitude).

Exercice 6

Soit $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \phi(t)\,\mathrm{d}t$. **Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.**

Ces lignes de niveau sont des courbes d'équation $f(x,y) =$ constante.
Tracer la direction et le sens de ∇f en quelques points.
On peut montrer que le gradient est normal aux lignes de niveaux en tous points.

3 Dérivée selon un vecteur, règle de la chaîne

Définition 9 : Dérivée selon un vecteur

On dit que $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ est **dérivable selon le vecteur** $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ **au point** $a = (x_0, y_0) \in \mathscr{U}$, lorsque $\phi : t \mapsto f(a + tv) = f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$ est dérivable en 0.
On note alors

$$\mathrm{D}_v f(a) = \phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Propriété 3 : Expression à l'aide du gradient

Lorsqu'elle existe, $\mathrm{D}_v f(a) = \left(\nabla f(x_0, y_0) \middle| v\right)$.

Exercice 7

Montrer que la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ **si** $(x,y) \neq (0,0)$ **et** $(0,0)$ **sinon admet des dérivées selon tout vecteur en** $(0,0)$ **et les déterminer.**

Exercice 8

Soit f **la fonction définie sur** $\mathbb{R}^2$ **par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. **Montrer que** f **admet une dérivée au point** $(0,0)$ **suivant tout vecteur de** $\mathbb{R}^2$.
2. **Observer que néanmoins** f **n'est pas continue en** $(0,0)$.

Propriété 4 : Règle de la chaîne

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ *sur un ouvert* $\mathscr{U}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

- *Si* x, y *des fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *telle que* $\forall t \in I,\ (x(t), y(t)) \in \mathscr{U}$.
  Alors $g : t \in I \mapsto f(x(t), y(t))$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *et* $\forall t \in I$, *En notant* $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$,

  cela se réécrit $\forall t \in I$,

  où $\gamma'(t) = \left(x'(t), y'(t)\right)$. *On parle de* ***dérivée le long de l'arc*** γ.
- *Si* φ *et* ψ *sont des fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur un ouvert* $\mathscr{V}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *tel que pour tout* $(u,v) \in \mathscr{V}$, $\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \in \mathscr{U}$, *alors* $h : (u,v) \in \mathscr{V} \mapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathscr{V}$ *et* $\forall (u,v) \in \mathscr{V}$,

Exercice 9 : Changement de variable et gradient en polaire

Soit $\mathscr{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathscr{V} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$,

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$$

$\vec{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ **et** $\vec{v}(\theta) = \vec{u}'(\theta)$.

1. **Montrer que** g **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $\mathscr{V}$.
2. **Si** $(r,\theta) \in \mathscr{V}$, **on note** $x = r\cos\theta$ **et** $y = r\sin\theta$. **Exprimer les dérivées partielles de** g **en** (r,θ) **en fonction des dérivées partielles de** f **en** (x,y).
3. **Exprimer le gradient** $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ **dans la base** $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ **en fonction des dérivées partielles de** g **en** (r,θ).

Exercice 10

Calculer les dérivées partielles de $h : (x,y) \mapsto g(x+y, xy)$.

Exercice 11

Calculer la dérivée de $g : t \mapsto f(tx_0, ty_0)$ **où** $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ **et** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 12

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. **Déterminer les dérivées (partielles) de** $g : (x,y) \mapsto f(y,x)$ **et** $h : x \mapsto f(x,x)$.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ i.e. telle que :
$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$.

1. **Montrer que** $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.
2. **Étudier la réciproque.**

III APPLICATION À LA RECHERCHE D'EXTREMUMS

$\mathscr{U}$ désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 10 : Extremum

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f présente en (x_0,y_0) un **maximum** (respectivement **minimum**) local s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in B((x_0,y_0),r)$, $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ (respectivement $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$).

(ii) On dit que f présente un **maximum** (respectivement **minimum**) global si cette inégalité est en fait valable pour tout $a \in A$.

Propriété 5 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $\mathscr{U}$ ouvert (très important !) de $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in \mathscr{U}$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en (x_0,y_0).

Si f présente un extremum local en (x_0,y_0), alors (x_0,y_0) est un point critique de f, c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles de f en (x_0,y_0) sont nulles.

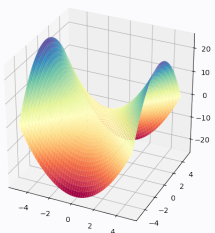
*La réciproque est fausse, et un contre-exemple est appelé **point selle** ou **point col**.*

Exercice 14

$$f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$$

présente un point selle en $(0,0)$.

La surface porte le doux nom de *paraboloïde hyperbolique*.



Méthode 1 : Recherche d'extremum

(i) Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur $\mathscr{U}$. Pour déterminer des extremums locaux de f on cherche ses points critiques.

Puis, pour chaque point critique (x_0,y_0), on étudie le signe de $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ pour (h,k) proche de $(0,0)$. Comme (x_0,y_0) est un point critique, les termes obtenus dans la différence sont au moins d'ordre 2.

(ii) Si $\mathscr{U}$ n'est pas un ouvert, on le décompose en son intérieur (ouvert) et son bord. Sur le bord, on étudie « à la main », en général à l'aide d'un paramétrage du bord.

Exercice 15

Déterminer les extremums de

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Exercice 16

Soit

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy^2$$
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \ x+y \leqslant 1\right\}$$

Montrer que f atteint un minimum et un maximum sur K et trouver tous les points en lesquels ils sont atteints.

Exercice 17

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-6y$
2. $g(x,y) = x^2+2y^2-2xy-2y+5$
3. $h(x,y) = x^3+y^3$
4. $i(x,y) = (x-y)^2+(x+y)^3$
5. $j(x,y) = x^3+y^3-3xy$.

Exercice 18

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable). Montrer que tout point critique est un minimum global.

Exercice 19

En admettant qu'il en existe, déterminer les triangles d'aire maximale inclus dans un cercle donné.