

Programme de colle – MP2I

Fractions rationnelles

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Fractions rationnelles	
Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.
Décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R}	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes.
Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X-\lambda}$.	
Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.	

Intégration

Extrait du programme officiel :

Cette section a pour principal objectif de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment et d'en établir les propriétés principales. Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues n'est pas un attendu du programme.

Le corps \mathbb{K} est pris égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Le professeur peut soit se placer d'emblée dans le cadre des fonctions à valeurs complexes, soit traiter en premier lieu le cas réel avant de procéder à une brève extension.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	Exemple des fonctions lipschitziennes. La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans \mathbb{K} . Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} .
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} .	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	

Inégalité triangulaire intégrale : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles.

Si f est continue, à valeurs dans \mathbb{R}^+ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Extension de la notation $\int_a^b f(t)dt$ au cas où $b \leq a$.
Propriétés correspondantes.

Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

d) Sommes de Riemann

Pour f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique.
Démonstration exigible pour f lipschitzienne.

e) Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

f) Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.

L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme.
On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale a été également vue.

Semaine prochaine (last but not least...) : Déterminant, séries.

Questions de cours

Les questions de cours précédées d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine des groupes 3 et 5 ayant colle d'informatique.

- (i) Intégrales de Wallis (avec équivalent).
- (ii) ★ Théorème de Heine.
- (iii) ★ $\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$
- (iv) Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
- (v) Sommes de Riemann : $S(f, \sigma, \xi) \xrightarrow{h(\sigma) \rightarrow 0} \int_{[a,b]} f$ soit dans le cas où f est continue (pour les étudiants plus à l'aise), soit dans le cas où f est K -lipschitzienne.
- (vi) ★ Théorème fondamental : dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.
- (vii) Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- (viii) **CCINP 56** : On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
 - 1. Montrer que H est \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
 - 2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
 - 3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de la fonction H .