

Programme de colle – MP2I

Déterminant

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n -linéaire alternée sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n -linéaire alternée et si (x_1, \dots, x_n) est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une unique forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$; toute forme n -linéaire alternée est un multiple de \det_e . Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. Comparaison, si e et e' sont deux bases, de \det_e et $\det_{e'}$. La famille (x_1, \dots, x_n) est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.	Notation \det_e . La démonstration de l'existence n'est pas exigible. Dans \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. L'application \det induit un morphisme de $GL(E)$ (resp. $GL_n(\mathbb{K})$) sur \mathbb{K}^* . Déterminant d'une transposée.	Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.
f) Comatrice	
Comatrice. Relation $A \operatorname{Com}(A)^T = \operatorname{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$.	Notation $\operatorname{Com}(A)$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

La notion de polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ a été introduite. Il permet de calculer les valeurs propres en vue exclusivement d'une diagonalisation effective. Il est unitaire, de degré n , de coefficient constant $(-1)^n \det A$ et de coefficient de degré $n - 1$, $-\text{tr} A$.

Série

Extrait du programme officiel :

L'étude des séries prolonge celle des suites et permet d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique. Les objectifs majeurs en la matière portent sur les séries à termes positifs et la convergence absolue. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

Contenus

Capacités & commentaires

a) Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique.
Convergence, divergence, somme.

La série est notée $\sum u_n$.

En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Reste d'une série convergente.

Lien suite-série.

Divergence grossière.

La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

b) Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Séries de Riemann.

Application à l'étude de sommes partielles.

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de \mathbb{R}^+ , si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

d) Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

Grand merci à tous les colleurs pour la grande qualité pédagogique de leurs colles cette année.

Questions de cours

- (i) Déterminant d'une transposée.
- (ii) Déterminant de Vandermonde (avec des polynômes.)
- (iii) Formule de la comatrice.

(iv) CCINP 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas** $\alpha \leq 0$: En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas** $\alpha > 0$: Étudier la nature de la série.

Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

(v) CCINP 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

(vi) CCINP 7

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

(vii) **CCINP 8**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

- (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. Étudier la convergence pour $x \in \mathbb{R}$ fixé de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(viii) **CCINP 46**

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ converge-t-elle absolument ?

(ix) **CCINP 63**

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n .

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n .
3. Le réel 0 est-il valeur propre de A_n ?