

Devoir Libre n° 19

Le but de ce problème est de déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel α .

Cas où $\alpha > 1$

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est convergente.

Cas où α appartient à $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$

On suppose, dans cette partie, que α appartient à $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$.

On définit la fonction ϕ sur $[1, +\infty[$ en posant $\phi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

On pose $u_n = \phi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \phi(t) dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Nature de l'intégrale impropre (ou généralisée) $\int_1^{+\infty} \phi(t) dt$.

2.a) Montrer que pour tout $x > 1$:

$$\int_1^x \phi(t) dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy$$

2.b) En déduire que

$$\int_1^x \phi(t) dt = 2 \left(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}} - \frac{1}{\pi} \right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} dy$$

2.c) On admet que si $x \mapsto \int_1^x |f(t)| dt$ admet une limite finie en $+\infty$, alors c'est aussi le cas pour $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ (démonstration similaire à l'absolue convergence des séries).

En déduire que la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} dy$ est convergente en $+\infty$.

2.d) En déduire que la fonction $x \mapsto \int_1^x \phi(t) dt$ l'est aussi.

3. Étude de la dérivée de la fonction ϕ .

3.a) Montrer que la fonction ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et calculer sa dérivée $\phi'(t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$.

3.b) Montrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$\forall t \in [1, +\infty[, |\phi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

3.c) Montrer que pour tout $(a, b) \in [1, +\infty[^2$ vérifiant $a < b$, on a

$$|\phi(a) - \phi(b)| \leq \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}} |a - b|$$

4. Nature de la série $\sum v_n$.

4.a) Exprimer la somme partielle $V_N = \sum_{n=1}^N v_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'une intégrale.

4.b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?

5. Nature de la série $\sum (u_n - v_n)$.

5.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - v_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

5.b) En déduire que $\sum_{n \geq 1} (u_n - v_n)$ converge.

6. Conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Cas $\alpha = \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que α vaut $\frac{1}{2}$.

7. En vue du développement asymptotique de $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, on pose

$$\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$$

7.a) Montrer que $\delta_n = \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} - \frac{i\pi(\pi+6)e^{i\pi\sqrt{n}}}{48n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

7.b) En déduire que

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi} (\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})) - \frac{\pi}{4n} \cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{(\pi+6)}{24n^{3/2}} \sin(\pi\sqrt{n}) + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

8.

8.a) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}}$? Celle de $\sum_{n \geq 1} w_n$ avec $w_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$?

On admet que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

8.b) En utilisant des suites extraites, démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\cos(\pi\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente .

8.c) Que peut-on en déduire sur la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

Cas $\alpha < \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que le réel α est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

On va montrer, par l'absurde, que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge. On suppose donc que

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{n=1}^p \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$, et $S_0 = 0$.

9. Montrer que pour tout entier N supérieur ou égal à 2, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^N S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}) + S_N (N+1)^{\alpha-1/2}$$

10. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2})$ est convergente.

Indication : on pourra justifier que (S_n) est bornée.

11. Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

12. Conclure sur la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

————— FIN DE L'ÉNONCÉ —————