33

Fonctions de deux variables

I Un Zeste de topologie

1 Boules et ouverts de $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Ainsi, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Définition 1 : Boule ouverte

On appelle **boule ouverte de centre** $a\in\mathbb{R}^2$ **et de rayon** $r\in\mathbb{R}^+$

$$B(a,r) = \left\{v\in\mathbb{R}^2,\ \|v-a\| < r\right\}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 2 : Ouvert

Une partie $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite **ouverte** ou **un ouvert** de $\mathbb{R}^2$ lorsque

$$\forall a\in\mathscr{U},\ \ \exists\varepsilon>0,\ \ B(a,\varepsilon)\subset\mathscr{U}.$$

Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

2 Fonctions de deux variables continues

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition 3 : Continuité

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$. On dit que f est **continue en** $(x_0,y_0)\in\mathscr{U}$ lorsque

$$f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} f(x_0,y_0),$$

où $(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)$ signifie que $\|(x-x_0,y-y_0)\|\longrightarrow 0$, c'est-à-dire que $x\to x_0$ et $y\to y_0$ simultanément.

Définition 4 : Applications partielles

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ une fonction, $(x_0,y_0)\in\mathscr{U}$.

On appelle **applications partielles de** f **en** (x_0,y_0) les applications $x\mapsto f(x,y_0)$ et $y\mapsto f(x_0,y)$.

II Dérivées partielles

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

1 Dérivées partielles

Définition 5 : Dérivées partielles

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in\mathscr{U}$.

On appelle **dérivées partielles de** f **en** (x_0,y_0), lorsqu'elles existent, les dérivées des applications partielles de f en (x_0,y_0) : $f_1:x\mapsto f(x_0,y_0)$ et $f_2:y\mapsto f(x_0,y_0)$.

On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_1'(x_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_2'(y_0)$

2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 6 : Classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$. On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$** lorsqu'en tout point de $\mathscr{U}$, les dérivées partielles de f existent, et que ces dérivées partielles sont continues.

On note $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété 1 : Structure

$\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Théorème 1 : DL$_1$

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(x_0,y_0)\in\mathscr{U}$. Pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h,y_0+k)\in\mathscr{U}$,

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \underset{\|(h,k)\|\to 0}{\mathrm{o}}(\|(h,k)\|).$$

Corollaire 1 : $\mathscr{C}^1 \Longrightarrow$ continue

Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.

Définition 7 : Plan tangent

Par analogie avec la tangente pour une fonction d'une seule variable, on appelle **plan tangent** à la surface d'équation $z=f(x,y)$ au point de coordonnées (x_0,y_0) le plan d'équation

$$z-z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Définition 8 : Vecteur gradient

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. On appelle **gradient** de f en (x_0, y_0) le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Lorsque $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, on dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f.

Propriété 2 : Expression du DL_1 avec le gradient

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in \mathcal{U}$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(\nabla f(x_0, y_0) | (h, k)\right) + \underset{\|(h,k)\| \to 0}{\mathrm{o}}(\|(h, k)\|).$$

3 Dérivée selon un vecteur, règle de la chaîne

Définition 9 : Dérivée selon un vecteur

On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est **dérivable selon le vecteur** $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ **au point** $a = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, lorsque $\phi : t \mapsto f(a + tv) = f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$ est dérivable en 0.

On note alors

$$\mathrm{D}_v f(a) = \phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Propriété 3 : Expression à l'aide du gradient

Lorsqu'elle existe, $\mathrm{D}_v f(a) = \left(\nabla f(x_0, y_0) \middle| v\right)$.

Propriété 4 : Règle de la chaîne

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$.

- *Si x, y des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in I$, $(x(t), y(t)) \in \mathcal{U}$.*
  Alors $g : t \in I \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= \left(\nabla f(x(t), y(t)) \middle| (x'(t), y'(t))\right). \end{aligned}$$

  En notant $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$, cela se réécrit $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \\ &= \left(\nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t)\right). \end{aligned}$$

  *où $\gamma'(t) = \left(x'(t), y'(t)\right)$. On parle de **dérivée le long de l'arc** γ.*
- *Si φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $(u, v) \in \mathcal{V}$, $\left(\varphi(u, v), \psi(u, v)\right) \in \mathcal{U}$, alors $h : (u, v) \in \mathcal{V} \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}$ et $\forall (u, v) \in \mathcal{V}$,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \end{aligned}$$

III Application à la recherche d'extremums

$\mathcal{U}$ désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 10 : Extremum

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f présente en (x_0, y_0) un **maximum** (respectivement **minimum**) local s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B((x_0, y_0), r)$, $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ (respectivement $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$).

(ii) On dit que f présente un **maximum** (respectivement **minimum**) global si cette inégalité est en fait valable pour tout $a \in A$.

Propriété 5 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $\mathcal{U}$ ouvert (très important !) de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en (x_0, y_0).

Si f présente un extremum local en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique de f, c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont nulles.

*La réciproque est fausse, et un contre-exemple est appelé **point selle** ou **point col**.*

Méthode 1 : Recherche d'extremum

(i) Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur $\mathscr{U}$. Pour déterminer des extremums locaux de f on cherche ses points critiques.

Puis, pour chaque point critique (x_0, y_0), on étudie le signe de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ pour (h, k) proche de $(0,0)$. Comme (x_0, y_0) est un point critique, les termes obtenus dans la différence sont au moins d'ordre 2.

(ii) Si $\mathscr{U}$ n'est pas un ouvert, on le décompose en son intérieur (ouvert) et son bord. Sur le bord, on étudie « à la main », en général à l'aide d'un paramétrage du bord.